Esercizi assegnati per il corso di AM6 (AA 2005/06)

Es 1 Dimostrare che su ogni spazio vettoriale normato che non ammetta base finita esistono funzionali lineari non continui. Provare a costruire degli esempi espliciti.

Es 2 Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale normato.
(i) Dimostrare che $\overset{\circ}{C}$ (= interno di C) è convesso.
(ii)Dimostrare che se $\overset{\circ}{C}$ è non vuoto la chiusura di $\overset{\circ}{C}$ coincide con la chiusura di C.

Es 3 Proprietà fondamentali delle funzioni s.c.i. (semi continue inferiormente). Dimostrare che una funzione s.c.i. su un compatto ammette minimo.

Es 4 Proprietà fondamentali delle funzioni convesse. Dimostrare che una funzione convessa è continua nei punti nell'intorno dei quali è limitata superiormente.

Es 5 Sia E uno s.v.n. (spazio vettoriale normato) con norma $\|\cdot\|$. Sia $C \subset E$ un insieme aperto, convesso, simmetrico ($-C = C$) e contenente l'origine; sia $p := p_C$ la sua funzione di gauge.
(i) Dimostrare che se C è limitato allora p definisce una norma equivalente a $\|\cdot\|$.
(ii) Sia $E = C([0,1])$ l'insieme delle funzioni continue su $[0,1]$ dotato della norma del massimo $\|u\| := \max_{[0,1]} |u|$ e sia

$$C := \left\{ u \in E : \int_0^1 |u|^2 < 1 \right\} .$$

Verificare che C è convesso, aperto, simmetrico e che $0 \in C$. Determinare la funzione gauge p_C e mostrare che definisce una norma; tale norma è equivalente a $\|\cdot\|$?

Es 6 Verificare che le seguenti funzioni $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ sono convesse, s.c.i. e calcolare φ^*:

$$\varphi = e^x , \qquad \varphi = \begin{cases} -\log x , & \text{se } x > 0 \\ \infty , & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{|x|^p}{p} \quad (1 < p < \infty) , \qquad \varphi = x^+ := \max\{x, 0\} .$$