Soluzioni della prova scritta di AM4 del 10/1/2006 – (II Esonero)

Vengono riportate le risposte alle questioni non affrontate esplicitamente a lezione.

Parte I

1) (iii):

$$\mu_1 : A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \to \mu_1(A) := \int_A e^{-(x^2+y^2)}\, dx \ ;$$

$$\mu_2 : A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \to \mu_2(A) := \begin{cases} 1 \ , & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

(iv) Sia μ una misura finita, σ–additiva e invariante per traslazione su $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Per l'invarianza per traslazioni, $\beta := \mu([0,1)) = \mu([i, i+1))$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$, e quindi (essendo μ finita)

$$\infty > \mu(\mathbb{R}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=-N}^{N-1} \mu([i, i+1)) = \lim_{N\to\infty} 2N\beta \ ,$$

che implica $\beta = 0$ e quindi $\mu(\mathbb{R}) = 0$ ovvero μ è la misura banale (identicamente nulla).

3)

$$\ell(\Gamma) := \sigma_1(\Gamma) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\Big(\sqrt{2} + \operatorname{senh}^{-1}(1)\Big) \ .$$

Parte II

6) Poiché $\mathbb{R}^2$ è stellato, ω_a è esatta se e solo se è chiusa e chiusa significa che

$$\partial_y(\cos x + axy) = \partial_x x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad ax = 2x$$

cioè $a = 2$. Una primitiva è data da

$$F(x,y) = \int_{\sigma^+\big((0,0),(x,y)\big)} \omega_2 = \cos x + xy^2 - 1 \ ,$$

dove $\sigma^+(0,(x,y))$ denota il segmento orientato che va dall'origine al punto (x,y).