Prova scritta di AM4 del 6/7/2006 – (Appello C)

- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**
- **Per poter superare l'eseme è necessario svolgere l'esercizio 1.**

1) (i) Enunciare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per superfici elementari orientabile con bordo.

(ii) Sia $S := \Big\{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| := \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = 1 \ \text{e} \quad x_3 > 0\Big\}$. Dimostrare che S è una superficie elementare orientabile con bordo e calcolare una coppia $(\nu^+, \partial S^+)$ orientata positivamente.

(iii) Verificare il teorema di Stokes per S come al punto (ii) e $F = (0, x_1, x_2)$.

2) (i) Trovare $f_n \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ tali che $f \notin \mathcal{R}([-R, R]^3)$ per ogni $R > 0$; $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

(ii) Discutere l'esempio del punto (i) con $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

3) Enunciare e dimostrare il teorema di completezza di Riesz–Fischer.

4) (i) Dimostrare che la lunghezza di una curva regolare è ottenibile come limite di poligonali iscritte.

(ii) Discutere la relazione tra area di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ e il volume di un piccolo intorno "cilindrico" di S.

5) Enunciare i teoremi di Fubini e Tonelli e dimostrarne uno a scelta.