Soluzioni Prova scritta di AM4 del 3/11/2004 – (I Esonero)

Gli esercizi 1, 2, 5 e 6 sono parte della teoria svolta a lezione.

3) Se A$\subset$ $\mathbb{R}^n$ è un aperto allora contiene un cubo aperto K di lato $r > 0$ e per la monotonia della misura di Peano–Jordan $\text{mis}\, A \geq \text{mis}\, K = r^n > 0$.
(ii) Sia $I \subset [0,1]$ l'aperto denso non misurabile secondo Peano–Jordan costruito a lezione; possiamo prendere $A = \{(x,y) : x \in I \; x^3 < y < x^2\}$.

4) (i) Insiemi della forma

$$S^{n-1}_{j,\sigma,\pm} := \{x_i = u_i \text{ per } i \neq j \text{ e } x_j = \pm(1 - \sqrt{|u|^2}) \; , u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < \sigma\}$$

con $n \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, $0 < \sigma < 1$ sono sottoinsiemi di S^{n-1} di misura nulla poiché immagini di una mappa regolare da uno spazio di dimensione $n-1$ ad uno spazio di dimensione n. Da

$$S^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{n} \left(S^{n-1}_{j,1/2,+} \cup S^{n-1}_{j,1/2,-} \right)$$

segue che S^{n-1} è di misura nulla.
(ii) Sia $X := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\}$, ($|\cdot|$= norma euclidea). La funzione $x \in S^{n-1} \to \phi(x) = x/\|x\| \in X$ è una funzione uniformemente Lipschitziana (come segue dalle proprietà della norma) e dunque $X = \phi(S^{n-1})$ è un insieme di misura nulla.