Soluzioni 6,7-AM4

Laura Di Gregorio

12 novembre 2004

Esercizio I

1) I coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin kx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[e^x \sin kx\Big]_0^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos kx\, dx \\ &= -\frac{2k}{\pi}\Big[e^x \cos kx\Big]_0^{\pi} - \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin kx\, dx \end{aligned}$$

dunque

$$b_k = \frac{2k}{k^2+1}\left[\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi}\right].$$

Inoltre

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Infine otteniamo

$$e^x = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}\left[(-1)^{k+1}e^{\pi} + 1\right] \sin kx.$$

2) Calcoliamo i coefficienti dispari

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[e^x \sin kx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx\, dx \\ &= -\frac{k}{\pi}\Big[e^x \cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{k^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx\, dx \end{aligned}$$

dunque

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{k}{k^2+1}\frac{2\sinh \pi}{\pi}.$$

Inoltre
$$c_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi}.$$
Analogamente calcoliamo i coefficienti pari
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[e^x \cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx\, dx \\ &= (-1)^k\Big(2\frac{\sinh \pi}{\pi}\Big) + (-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^2+1}\Big(2\frac{\sinh \pi}{\pi}\Big) \end{aligned}$$
dunque
$$a_k = 2\frac{(-1)^k}{k^2+1}\frac{\sinh \pi}{\pi}.$$
Infine otteniamo
$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\frac{\sinh \pi}{\pi}\big[\cos kx - \sin kx\big].$$

3) Sia $F(x) = x$. Essendo una funzione dispari basta calcolare i coefficienti della serie dei seni.
$$\begin{aligned} \hat{F}_k = b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin kx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x\cos kx}{k}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos kx\, dx = -\frac{2}{k}\,. \end{aligned}$$
Inoltre
$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = \pi$$
dunque la serie di Fourier richiesta è
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Big(-\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin kx\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\,. \end{aligned}$$

4) Basta osservare che
$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\Big(3\sin x - \sin 3x\Big)$$
dunque $b_1 = \frac{3}{4}, b_3 = -\frac{1}{4}$ e $b_n = 0$ per $n \neq 1, 3$.

5) Basta osservare che

$$\begin{aligned}\sin^2 k^2 x &= \left(\frac{e^{ik^2x}-e^{-ik^2x}}{2i}\right)^2 = \frac{-e^{2ik^2x}-e^{-2ik^2x}+2}{4} \\ &= \frac{1-\cos 2k^2x}{2}\end{aligned}$$

dunque la serie di Fourier associata ad f è

$$f(x) = \hat{f}_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k^2 x}{2^{k+1}}$$

dove

$$\hat{f}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio II

Le due condizioni omogenee $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ suggeriscono di cercare una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(t) \sin nx.$$

Mettendo tale espressione nell'equazione delle onde omogenea si ottiene che gli u_n devono soddisfare un'equazione del tipo

$$\ddot{u}_n + n^2 u_n(t) = 0$$

quindi saranno della forma

$$u_n(t) = a_n \sin nt + b_n \cos nt. \tag{1}$$

Dalla condizione $u(x,0) = \sin^3 x$ segue che

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3 x \sin nx \, dx$$

e dalla condizione $u_t(x,0) = 0$ segue che $a_n = 0$.
Dunque i b_n sono i coefficienti di Fourier di $\sin^3 x$.
Risulta

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\Big(3\sin x - \sin 3x\Big)$$

dunque $b_1 = \frac{3}{4}, b_3 = -\frac{1}{4}$ e $b_n = 0$ per $n \neq 1, 3$.
Mettendo questi coefficienti nella (1) si ottiene che la soluzione è

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\cos t \sin x - \frac{1}{4}\cos 3t \sin 3x.$$