Soluzioni 2-AM4

Laura Di Gregorio

4 ottobre 2004

1. Sia E qualsiasi. $\bar{E} \setminus E$ ha misura nulla perché è un insieme semplice. Supponiamo per assurdo che $E \setminus A$ abbia misura nulla. Allora $\bar{E} \setminus A = (\bar{E} \setminus E) \cup (E \setminus A)$ ha misura nulla. Quindi basta dimostrare la tesi per E chiuso.
Sia E chiuso. Allora $E \setminus A$ è compatto (A è aperto e quindi $E \setminus A$ è chiuso e limitato). Supponiamo per assurdo che $E \setminus A$ abbia misura nulla. Allora (per definizione) esistono cubi aperti C_j tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \supset E \setminus A$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) < \varepsilon := \mu(E) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu(K_j).$$

Siccome $E \setminus A$ è compatto esiste n tale che $\bigcup_{j=1}^{n} C_j \supset E \setminus A$ (sottoricoprimento finito). Ora $B := E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ è chiuso e quindi compatto. Risulta $B \subset A$. Per la compattezza esiste m tale che $\bigcup_{j=1}^{m} K_j \supset B$. Sia

$$D := \left(\bigcup_{j=1}^{m} K_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} C_j \right)$$

aperto, $D \supset E$ (si osservi che D è un insieme semplice). Per come è stato definito D vale che

$$\mu(D) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(C_j) + \sum_{j=1}^{m} \mu(K_j)\,,$$

inoltre $\mu(E) \leq \mu(D)$ e mettendo insieme le disuguaglianze si ha

$$\mu(E) \leq \mu(D) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(K_j) < \mu(E)$$

che è assurdo.

2. Per induzione su n. Per $n = 1$ è vero. Supponiamo che sia vero per $n-1$. La tesi segue dal fatto che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo

Peano-Jordan sse la frontiera è un insieme di misura nulla (vedi Proposizione 9.15 del libro *Lezioni di Analisi Matematica 2*- L. Chierchia) osservando che, se B è un insieme C-normale allora

$$\begin{aligned}\partial B = \{(x, \alpha(x)) \,:\, x \in \bar{A}\} \;\; &\cup \;\; \{(x, \beta(x)) \,:\, x \in \bar{A}\} \\ &\cup \;\; \{(x, y) \,:\, x \in \partial A \text{ e } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}\end{aligned}$$

(vedi anche Lemma 9.17).