

Prova scritta di AM4 del 14/7/2004 - Appello C

1. Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici, etc.
2. Per superare la prova è necessario svolgere l'esercizio 1.

1) Calcolare

$$\int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}.$$

2) Si trovi la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & t > 0, & \quad x \in (0, \pi), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) &= 0, & t > 0, \\ u(0, x) &= 1, & x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

3) Sia

$$A := \bigcup_{j \geq 2} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{10^j}, \frac{1}{j} + \frac{1}{10^j} \right).$$

Dire se A è un insieme misurabile secondo Peano–Jordan e dimostrare l'affermazione fatta. Descrivere la frontiera di A .

- 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Vitali–Lebesgue.
- 5) Enunciare e dimostrare il lemma di Riemann–Lebesgue per funzioni su \mathbb{R} .
- 6) Discutere il teorema del cambio di variabili in \mathbb{R}^2 per trasformazioni lineari.