Prova scritta di AM4 del 13/2/2004 - Appello B

1. Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici, etc.
2. Per superare la prova è necessario ottenere la sufficienza sia nella Parte I che nella Parte II.

Parte I

1) Calcolare $\int \frac{\sqrt{x}}{2+x}$.

2) Calcolare $\int \frac{dx}{(1+\tan x)\operatorname{sen}^2 x}$.

3) (i) Dare ipotesi su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affinché la sua trasformata di Fourier appartenga a $\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e dimostrare l'affermazione fatta.
(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\hat{f} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$; trovare la soluzione del seguente problema:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 2u_{xx} = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ , \qquad t > 0 \ , \\ &u(x,0) = 0 \ , \qquad u_t(x,0) = f(x) \ . \end{aligned}$$

Si discutano le proprietà di regolarità della soluzione trovata u.

Parte II

4) Sotto quali ipotesi la serie di Fourier di $f \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$ converge *uniformemente* a f su $[0,2\pi]$? Dimostrare il relativo teorema.

5) (i) Dare la definizione di $\mathcal{R}_1([0,1])$ e dimostrare che la definizione data è ben posta.
(ii) Dare un esempio di funzione $f \in \mathcal{R}_1([0,1])$ tale che $f \notin \mathcal{R}([0,1])$.

6) Si dimostri che l'insieme ternario di Cantor non ha punti isolati.