Soluzioni 8-AM4

Laura Di Gregorio

20 novembre 2003

1. M è un k-elemento di varietà quindi esiste una inclusione differenziabile φ tale che $1 \leq k \leq m$

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow M$$

tale che

$$u \longmapsto x = \varphi(u).$$

Analogamente N è un h-elemento di varietà quindi esiste una inclusione differenziabile ψ tale che $1 \leq h \leq n$

$$\psi : U \subset \mathbb{R}^h \longrightarrow M$$

tale che

$$v \longmapsto y = \psi(v)$$

Sia

$$\chi : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

tale che

$$\chi(u, v) = (\varphi(u), \psi(v)).$$

Se consideriamo la matrice

$$D\chi = \begin{pmatrix} D\varphi & 0 \\ 0 & D\psi \end{pmatrix}$$

segue facilmente che l'applicazione χ è un'inclusione differenziabile perché è iniettiva e la matrice $D\chi$ ha rango massimo.

2. L'applicazione

$$y \longmapsto \int_M f(x, y) d\sigma_M(x)$$

è banalmente continua, basta osservare che

$$\int_M f(x,y)d\sigma_M(x) = \int_U f(\varphi(u),y)\sqrt{\sum_{1\le i_1<i_k\le m}\left|\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\dots,u_k)}\right|^2}\,du$$

e che φ è continua su U e f è continua, in particolare, su $M\times y$. Analogamente per l'altra.

3. Si osservi che:

$$\int_N\left(\int_M f(x,y)\,d\sigma_M(x)\right)d\sigma_N(y) = \int_V\int_U f(\varphi(u),\psi(v))d\sigma_{\varphi(u)}d\sigma_{\psi(v)}$$

dove

$$\begin{aligned} d\sigma_{\varphi(u)} &= \sqrt{\sum_{1\le i_1<i_k\le m}\left|\det\frac{\partial(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_k})}{\partial(u_1,\dots,u_k)}\right|^2}\,du \\ d\sigma_{\psi(v)} &= \sqrt{\sum_{1\le j_1<j_h\le n}\left|\det\frac{\partial(\psi_{j_1},\dots,\psi_{j_h})}{\partial(v_1,\dots,v_h)}\right|^2}\,dv. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\int_{M\times N} f(x,y)\,d\sigma_{M\times N} = \int_{U\times V} f(\chi(u,v))\,d\sigma_{\chi(u,v)}$$

dove

$$d\sigma_{\chi(u,v)} = \sqrt{\sum_{1\le l_1<l_{h+k}\le n+m}\left|\det\frac{\partial(\chi_{l_1},\dots,\chi_{l_{h+k}})}{\partial(u,v)}\right|^2}\,du\,dv.$$

Se si dimostra che

$$1\le l_1<l_k\le m<m+1\le l_{k+1}<l_{k+h}\le m+n \tag{1}$$

si ha la tesi, in quanto basta rinominare gli indici della somma nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccc} i_1=l_1 & \dots & i_k=l_k \\ j_1=l_{k+1}-m & \dots & j_h=l_{k+h}-m \end{array}$$

e si vede facilmente che

$$d\sigma_{\chi(u,v)} = d\sigma_{\varphi(u)}d\sigma_{\psi(v)}.$$

Per dimostrare (1) ricordiamo due proprietà del determinante:

- Se A e B sono matrici quadrate allora

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

- Se A e B non sono quadrate allora

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0$$

Ora si supponga che $l_k > m$ allora ci si trova nel caso in cui la matrice

$$A = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)}$$

non è quadrata e dunque

$$\det \frac{\partial(\chi_{l_1}, \dots, \chi_{l_{h+k}})}{\partial(u, v)} = 0.$$

Analogamente i termini per cui $l_{k+1} < m + 1$ danno contributo nullo nel calcolo del determinante in quanto ci si trova nel caso in cui la matrice

$$B = \frac{\partial(\psi_{j_1}, \dots, \psi_{j_h})}{\partial(v_1, \dots, v_h)}$$

non è quadrata, dunque segue (1).