Soluzioni 3-AM4

Laura Di Gregorio

9 ottobre 2003

1.

a)

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{x^{-1}}^{x} \frac{1}{y^2} dy = \frac{9}{4}$$

b) Il dominio $\mathcal{D}$ si può scrivere come dominio normale rispetto alle x:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\}$$

quindi l'integrale si calcola

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} y^3 e^x \,dx\,dy &= \int_0^1 y^3 dy \int_{y^2}^1 e^x dx \\
&= \int_0^1 y^3 (e - e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^3\, e^{y^2} dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^2\,(y\, e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^2\, \frac{1}{2} \frac{d}{dy}(e^{y^2}) dy \\
&= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \int_0^1 y\, e^{y^2} dy \\
&= \frac{e}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Il dominio $\mathcal{D}$ si può scrivere come dominio normale rispetto alle y:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

quindi l'integrale si calcola

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} xy \, dx \, dy &= \int_0^1 x \, dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

2. Si consideri il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = b\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = c\rho \cos\varphi \end{cases}$$

con $(\varphi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ e $0 < \rho < 1$.
Il determinante Jacobiano è

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| = abc\rho^2 \sin\varphi$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy \, dz &= a^3bc \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho \\
&= \frac{a^3bc}{5} \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{\pi a^3bc}{5} \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \\
&= \frac{\pi a^3bc}{5} \int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi) d(-\cos\varphi) \\
&= \frac{\pi a^3bc}{5} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{15} \, a^3bc\pi
\end{aligned}$$

3. I punti d'intersezione sono $A = \left\{ \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} \right\}$ e $B = \left\{ \frac{1}{a}, 1 \right\}$ oltre l'origine, quindi la regione racchiusa tra i punti O,A,B ha area

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(a) &= \int_0^{a^{-3}} dx \int_{xa^{-1}}^{ax} dy + \int_{a^{-3}}^{a^{-1}} dx \int_{a^2x^2}^{ax} dy \\
&= \frac{1}{6a}\left[1 - \frac{1}{a^6}\right]
\end{aligned}
$$

Si osservi che

$$\lim_{a \to 1^+} \mathcal{A}(a) = 0$$

e

$$\lim_{a \to +\infty} \mathcal{A}(a) = 0$$

quindi per il teorema di Weierstrass $\mathcal{A}(a)$ ammette un punto di massimo. Calcolando la derivata di $\mathcal{A}(a)$ si trova che si annulla in $a = \pm\sqrt[6]{7}$ quindi il massimo è raggiunto in $a = +\sqrt[6]{7} > 1$.

4. Si osservi che le coppie $(x, y) \in \mathcal{D}$, dove $\mathcal{D}$ è il disco unitario, soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$x^2 + y^2 - 2 \le -1 \qquad\qquad 4 - (x + y) \ge 2$$

da cui segue che

$$x^2 + y^2 - 2 \le 4 - (x + y).$$

Quindi la base superiore della regione considerata è rappresentata dalla porzione di piano $z = 4 - (x + y)$ intercettata dal cilindro, mentre la base inferiore dalla porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$.

Il cilindro in forma normale è

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x^2 + y^2 - 2 \le z \le 4 - (x + y) \right\}$$

dunque il volume è dato da

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iiint_{\mathcal{C}} dx\, dy\, dz \\
&= \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy \int_{x^2+y^2-2}^{4-(x+y)} dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{\mathcal{D}} [4-(x+y)-(x^2+y^2-2)]dx\,dy \\
&= \iint_{\mathcal{D}} [6-(x+y)-(x^2+y^2)]dx\,dy
\end{aligned}
$$

Con il cambio di coordinate

$$
\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}
$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$ e $0 < \rho < 1$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} [6-(x+y)-(x^2+y^2)]dx\,dy &= \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} [6-\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\rho^2]d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho(6-\rho^2)d\rho = \frac{11}{2}\pi
\end{aligned}
$$