Soluzioni 12-AM4

Laura Di Gregorio

18 dicembre 2003

Trasformando secondo Fourier otteniamo

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + \xi^2 \tilde{u} = 0 \\ \\ \tilde{u}(0, \xi) = \widetilde{u_0}(\xi) \end{cases}$$

Dall'equazione di prim'ordine

$$\tilde{u}_t + \xi^2 \tilde{u} = 0$$

segue che

$$\tilde{u}(\xi, t) = A\, e^{-\xi^2 t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$A = \tilde{u_0}(\xi)$$

da cui segue la soluzione

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \tilde{u_0}(\xi).$$

Definiamo il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y)\, dy.$$

Dalla definizione di trasformata di Fourier e di prodotto di convoluzione segue immediatamente la proprietà delle funzioni integrabili

$$\widetilde{(f * g)}(\xi) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\xi) \tilde{g}(\xi).$$

Se pensiamo $e^{-\xi^2 t}$ come la trasformata di una certa funzione, si ottiene che la soluzione è l'antitrasformata di un prodotto di convoluzione.

Dunque basta calcolare l'antitrasformata di $e^{-\xi^2 t}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - t\xi^2} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-tz^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\left(y - \frac{ia}{2b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Dalle considerazioni fatte in precedenza, segue che

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

è la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbb{R}$.