Soluzioni Prova scritta di AM4 del 8/1/2004 – (II Esonero)

1) (i): se $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \in \mathcal{R}_2(-\pi,\pi)$, allora

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \ .$$

(ii): $\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\cos nx$, per $x \in (-\pi,\pi)$.

(iii): da (i) e (ii) segue che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{\pi^4}{90}$.

2) (i): $\hat{f}(\xi) = \frac{i\xi e^{-i\xi} + e^{-i\xi} - 1}{\sqrt{2\pi}\xi^2}$.

(ii): $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ e, usando la serie per l'esponenziale,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{(i\xi+1)\Big(1 - i\xi - \frac{\xi^2}{2} + O(\xi^3)\Big) - 1}{\xi^2} = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\frac{\xi^2}{2} + O(\xi^3)}{\xi^2} \to \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ .$$

(iii) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t}\ e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$.

(iv): Sia $t_j \geq 1$ una qualunque successione che tenda a ∞ e siano

$$g_j(\xi) = e^{-\xi^2 t_j}\ e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\ , \qquad g(\xi) = 0\ , \qquad G(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{2}\ .$$

Allora $g_j, g, G \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e (poiché $|\hat{f}| \leq \|f\|_1 = \frac{1}{2}$ e $t_j \geq 1$) $|g_j| \leq G$; inoltre $g_j \to g$ uniformemente su $[-a,a]$. Dal lemma sulla convergenza dominata segue che $\int_{\mathbb{R}} g_j \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dall'arbitrarietà della successione t_j segue che $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ per ogni x.