AM3 - Tutorato VIII

Integrazione in $\mathbb{R}^n$ e cambio di variabili

Mercoledì 28 aprile 2004

Teorema 1 (Cambio di Variabili in $\mathbb{R}^n$). Sia A un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ aperto e misurabile secondo Peano-Jordan; Sia $\Phi \in C^1(A, \mathbb{R})$ iniettiva nell'interno di A, limitata e tale che $\det(J_\Phi) \neq 0$ su A (dove J_Φ denota la matrice Jacobiana di Φ) ; allora $B = \Phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$ e

$$mis_n(B) = \int_A |\det(J_\Phi)|\, dx$$

Inoltre se $f \in \mathcal{R}(B)$ allora $f \circ \Phi \in \mathcal{R}(A)$ e si ha:

$$\int_B f(y)\, dy = \int_A f \circ \Phi(x)\, |\det(J_\Phi)|\, dx$$

Esercizio 1. Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{x} \leq y \leq x^2,\, 0 \leq x \leq 2\right\}$, calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_A \frac{x}{y^3}\, dx\, dy$$

Esercizio 2. Sia D la porzione della corona circolare di raggi 1 e 2 contenuta nel primo quadrante, calcolare

$$\iint_D x\, dx\, dy$$

Esercizio 3. Sia B la regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e dal cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_B z\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz$$

(sugg: una volta ottenuto un integrale di due variabili passare a coordinate polari) .

Esercizio 4. Sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$ calcolare

$$\iint_T \exp\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\, dx\, dy$$

(sugg: considerare il cambio di variabili $u = x + y$ e $v = x - y$) .