AM3 - Tutorato XI

Integrazione di 1-forme differenziali

Mercoledì 26 maggio 2004

Esercizio 1. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} y^2z^3\,dx + 2xyz^3\,dy + 3xy^2z^2\,dz$$

dove γ_n è la curva di parametrizzazione

$$\vec{r_n} = (1+\sin t)^n\vec{e_1} + \cos t\vec{e_2} + \sqrt[n]{t}\vec{e_3}$$

per $0 \le t \le 2\pi$ e $n = 1, 2, 3\ldots$

Esercizio 2. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega(x,y,z) = \frac{y^2}{x+1}\,dx + 2y\ln(1+x)\,dy + xz\,dz$$

e

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

dove γ_1 è una qualsiasi curva contenuta nel piano $x\,y$ congiungente l'origine e il punto $(1,0,0)$; γ_2 è il tratto dell'asse z che congiunge l'origine con il punto $(0,0,1)$; γ_3 è il segmento che unisce i punti $(0,0,1)$ ed $(1,0,0)$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente 1- forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{\left(y^3 - x^2y\right)\,dx + \left(x^3 - y^2x\right)\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

1. Dimostrare che ω è chiusa. Si può dedurre da ciò che ω è esatta? (giustificare la risposta).

2. Sia $\alpha > 0$ e sia $\gamma_\alpha = +\partial B_\alpha$ (circonferenza di centro l'origine e raggio α orientata positivamente). Calcolare:

$$\int_{\gamma_\alpha}\omega$$

3. Sia ora γ una qualsiasi curva chiusa e semplice in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che rappresenti il bordo di un dominio contenente l'origine. Mostrare che:
$$\int_\gamma \omega = 0$$
4. Dedurre dal punto precedente che ω è esatta e trovarne una primitiva.

   (sugg: cercare di esprimere la primitiva in coordinate polari)