Soluzioni 6-AM3

Laura Di Gregorio

5 aprile 2004

1. Il dominio di f è:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0,\ j = 1, \dots n\}.$$

Per il vincolo si ha: $0 < x_j < 1$ $(j = 1, \dots, n)$. Inoltre $f(x) < 0$ in

$$E = \Big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\Big\}$$

e

$$\sup_{x \in E} f(x) = 0.$$

Si cercano i punti critici di f soggetti al vincolo

$$F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = 0$$

usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
f e g sono di classe C^∞ ed E non ha punti singolari.
I punti critici della funzione

$$H(\vec{x}, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} x_j \log x_j + \lambda\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1\Big)$$

sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log x_j + 1 + \lambda = 0 & \quad j = 1, \dots n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \end{cases}$$

Si trova

$$x_j = \frac{1}{n}, \qquad j = 1, \dots n$$

e perciò $f(x)$ vincolata a $F(x) = 0$ ha un solo punto critico.
Tale punto è un punto di minimo globale.
Infatti si ha
$$f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = -\log n$$
e si dimostra che
$$\sum_{j=1}^{n} x_j \log x_j \geq -\log n.$$
Per vederlo basta osservare che la funzione $y = \log t$ è convessa, quindi
$$-\log(\alpha t + \beta s) \leq -[\alpha \log t + \beta \log s], \qquad \alpha + \beta = 1, \qquad t, s > 1$$
e per induzione:
$$-\log\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho_j\right) \leq -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log \rho_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \qquad \rho_j > 1.$$
Scegliendo $\alpha_j = \rho_j$ e $\rho_j = \frac{1}{x_j}$ si ottiene la tesi.

2. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova che la funzione assume valore massimo 11 sul bordo nei punti $(0, \pm 3)$ mentre il minimo è -1 ed è assunto nell'origine.