Prova scritta di AM3 del 14/4/2004 – (I Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario (ma non sufficiente) svolgere almeno due tra gli esercizi della Parte I ed almeno uno della Parte II.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

Parte I

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = \dfrac{\cosh t}{1+e^t} \ , \\ \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} t\, y'(t) = y(t) + t \sinh \dfrac{y(t)}{t} \ , \qquad t > 0 \ , \\ \\ y(1) = \log 3 \ . \end{cases}$$

3) Si calcolino il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y, z, t) = xt - yz$$

sul seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$

$$\{x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}.$$

4) Si dica se la funzione

$$f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x) = \left(3x_2 + x_1 x_2 \, , \, \log(1 + x_1) + x_2^3\right)$$

è invertibile in un intorno dell'origine ed in caso affermativo si determini un intorno di $f(0)$ su cui è definita la funzione inversa.

Parte II

5) Si enunci e si dimostri il teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali ordinarie.

6) Sia $f \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$ e $\| \cdot \|$ una qualunque norma in $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che

$$\left\| \int_0^1 f(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|f(t)\| \, dt \ .$$