

Esonero 1 – 13/4/2012

- N.B.** • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
 - **È vietato:** parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
 - *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*
 - **Attenzione:** è obbligatorio svolgere il primo esercizio.

Es 1 [Pt. 24] (i) Definire la norma operatoriale di una matrice; precisare e dimostrare la seguente relazione: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(ii) Enunciare il teorema della funzione inversa in \mathbb{R}^n e illustrarlo sulla funzione

$$x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\log(1 + x_1) \cos(x_2 + x_1), \sin(x_2 - x_1)) .$$

(iii) Dare la definizione di insieme misurabile secondo Peano–Jordan e dimostrare che l'insieme $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = x\}$ è misurabile e $\text{mis}_2(E) = 0$.

(iv) Dare la definizione di integrale di Riemann di f su $B \subset \mathbb{R}^n$ e dare un esempio di una funzione integrabile su $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ e } x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$.

(v) Dare la definizione di insieme normale; darne un esempio in \mathbb{R}^4 .

(vi) Calcolare l'integrale $\int_{[-1,1]^3} e^{|x|_1} dx$ giustificando i vari passaggi.

Es 2 [Pt. 30] Sia $x \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow g(x) \in \mathbb{R}$ la funzione definita implicitamente da

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ \sin(x_1 + g(x)) + \frac{x_1}{1 - x_2^2 g(x)} = 0 . \end{cases}$$

Trovare una sfera $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ su cui sia definita e regolare la funzione g e dare una stima del $\sup_B |g|$.

Es 3 [Pt. 14] Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio limitato dalle parabole $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$ e calcolare l'integrale

$$\int_D xy dx dy .$$

Es 5 [Pt. 12] Calcolare il massimo di $f = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$ sull'ellissoide $\{x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

Es 6 [Pt. 20] Discutere la misurabilità in \mathbb{R}^2 dell'insieme $E = \bigcup_{k \geq 1} B_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)$.