Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

24 Aprile 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 8

Alcuni cambiamenti di variabili:

- COORDINATE POLARI:

$$\Phi(\rho,\theta)=\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad det(J_\Phi)=\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le r$$

- COORDINATE CILINDRICHE:

$$\Phi(\rho,\theta)=\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=t \end{cases} \quad det(J_\Phi)=\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le r \;\; 0\le z\le h$$

- COORDINATE ELLITTICHE:

$$\Phi(\rho,\theta)=\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases} \quad det(J_\Phi)=ab\rho \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le\rho\le 1$$

  (con a e b lunghezze dei due semiassi)

1. Sia $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\ge 1, x+y\le 2, y\le 0\}$. Calcolare

$$\int_A \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$

Soluzione:
Passiamo in coordiante polari:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Chiamiamo Φ tale trasformazione e abbiamo che
$\Phi^{-1}(A)=\{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] : 1\le\rho\le\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$
dunque

$$\int_A \frac{x}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\cos\theta d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}-\cos\theta d\theta=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\tan\theta}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=_{s=\tan\theta}2\int_0^{\infty}\frac{ds}{(1+s)(1+s^2)}-[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s}-\frac{t}{1+s^2}ds+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{ds}{1+s^2}-1=[\log\frac{1+s}{\sqrt{1+s^2}}+\arctan s]_0^{\infty}-1=\frac{\pi}{2}-1$$

2. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2\}$ Calcolare:

$$\int_A y(y^2+y+1)dxdydz$$

Soluzione:
Passando in coordinate cilindriche con la traformazione Φ:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

si ha che $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \rho \leq t, 1 \leq t \leq 2\}$ dunque

$$\int_A y(y^2+y+1)dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 dt \int_0^t \rho^2\sin\theta(\rho^2\sin^2\theta+\rho\sin\theta+1)d\rho =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 dt \int_0^t \rho^4\sin^3\theta d\rho + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 dt \int_0^t \rho^3\sin^2\theta d\rho + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_1^2 dt \int_0^t \rho^2\sin\theta =$$

Ora notiamo che il primo e il terzo integrale sono nulli in quanto stiamo integrando una funzione dispari ($\sin\theta$) in un dominio simmetrico ($[-\pi,\pi]$),

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \int_1^2 [\frac{\rho^4}{4}]_0^t dt = \frac{1}{4}[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}]_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 t^4 dt = \frac{\pi}{4}[\frac{t^5}{5}]_1^2 = \frac{31}{20}\pi$$

3. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x>0, y>0\}$. Calcolare

$$\int_A \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$$

Soluzione:
Passando in coordiante polari con la trasformazione Φ si ha che
$\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta) \in [0,\infty) \times [-\pi,\pi] : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e dunque:

$$\int_A \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy = \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \rho\cos\theta\sin\theta = [\frac{\rho^2}{2}]_1^2 [\frac{-\cos 2\theta}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$$

4. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+2y^2 \leq 1, x>0, y>0\}$ Calcolare

$$\int_A xydxdy$$

Soluzione:
Passando a coordinate ellittiche abbiamo che
$\Phi^{-1}(A) = \{(\rho,\theta) \in [0,\infty) \times [-\pi,\pi] : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ quindi:

$$\int_A xydxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{2}\rho^3\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{8}[-\frac{\cos 2\theta}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}$$

5. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{4}x \leq y^2 \leq x, 1 \leq xy \leq 2\}$. Calcolare

$$\int_A \log \frac{x}{y^2} dxdy$$

Soluzione:
Notiamo che A è la parte di piano (che si trova nel primo quadrante) delimitata dalle parabole $x = y^2$ e $x = 4y^2$ e dalle iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$, quindi se $(x,y) \in A$ allora $\frac{1}{4} \leq \frac{y^2}{x} \leq 1$ e $1 \leq xy \leq 2$. Operiamo quindi il seguente cambiamento di variabili:

$$\Psi = \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

con le limitazioni $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 4$. Cerchiamo il cambio di variabili inverso:

$$\Phi = \begin{cases} x = u(\frac{v}{u})^{\frac{1}{3}} \\ v = (\frac{v}{u})^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

E si ha $det(J_\Phi) = \frac{1}{3v}$. L'integrale diventa:

$$\int_A \log \frac{x}{y^2} dxdy = \int_1^2 du \int_1^4 dv \frac{1}{3v} \log v = \frac{1}{3} \int_1^2 du [\frac{log^2 v}{2}]_1^4 = \frac{1}{6} \log^2 4$$

6. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 4x \leq 0\}$. Calcolare

$$\int_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

Soluzione:
Passiamo in coordinate polari e abbiamo che
$\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e quindi:

$$\int_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{64\cos^3\theta}{3} =$$

$$= \frac{64}{3}([\sin\theta\cos^2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta d\theta) = \frac{128}{3}[\frac{1}{3}\sin^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{9}$$

7. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x > 0, y > 0, \log 2 \leq z \leq \log 3\}$. Calcolare

$$\int_A x + y^2 dxdydz$$

Soluzione:
Passando a coordianate cilindriche si ha che $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \theta, t) \in [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \log 2 \leq t \leq \log 3\}$,

$$\int_A x + y^2 dxdydz = \int_{\log 2}^{\log 3} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \ \ \rho(\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta) =$$

$$= (\log\frac{3}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta [\frac{\rho^3}{3}]_0^{\sqrt{3}} + \sin^2\theta [\frac{\rho^4}{4}]_0^{\sqrt{3}} = (\log\frac{3}{2})\frac{3\sqrt{3}}{3} + (\log\frac{3}{2})\frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= (\log\frac{3}{2})(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{9\pi}{16})$$

8. Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y+1\}$. Calcolare

$$\int_A x dx dy dz$$

Soluzione:
Consideriamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\theta \\ y = 2 + \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

E si ha $\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \theta, t) : -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 3 + \rho\sin\theta\}$ e dunque:

$$\int_A x dx dy dz = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{3+\rho\sin\theta} dt\ \rho(2+\rho\cos\theta) = \int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \rho(2+\rho\cos\theta)(3+\rho\sin\theta) =$$

$$\int_0^1 d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\ 6\rho + 2\rho^2\sin\theta + 3\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta = \int_0^1 d\rho 12\pi = 12\pi$$