Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

17 Aprile 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 12

La matematica priva di definizioni rigorose
perde coerenza e bellezza

1. Esercizio 1

   Sia data la forma ω, si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove

   (a) $\omega = \frac{1}{1+y^2}dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \frac{2\cos t}{1+\cos^2 t} \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$

   (b) $\omega = \frac{z}{1+x}dx + \frac{x}{1+y}dy - xdz$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

   (c) $\omega = ydx + y^2dy$, $\omega = \partial^+ U$ con $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$

   (d) $\omega = e^{x-y}dx - e^{x-y}dy + xydz$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ t \\ e^t \end{pmatrix}$, $t \in [1, 2]$

   N.B.: Il testo di quest'ultimo esercizio dato in classe era differente e non evidenziava ciò che voleva evidenziare

   Soluzione:

   (a) Si nota facilmente che

   $$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1+y^2}\right) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}\right)$$

   dunque la forma è chiusa su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è esatta, e una primitiva è la funzione $F(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$.
   Da questo si deduce che

   $$\int_\gamma \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0) = F\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

   (b) In questo caso le derivate incrociate non coincidono, cioè ad esempio

   $$\frac{d}{dy}\left(\frac{z}{1+x}\right) = 0 \neq \frac{1}{1+y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

   Dunque la forma non è esatta, dunque procediamo al calcolo dell'integrale.

Per il calcolo vero e proprio abbiamo bisogno di calcolare il vettore tangente alla curva:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{t^2}{1+t} \\ \frac{t}{1+t} \\ -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{1+t} + \frac{t}{1+t} - 2t^2 \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t - 2t^2\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

(c) Anche qui le derivate incrociate non coincidono, dunque la forma non è nuovamente esatta.

Il bordo di U è parametrizzato da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi], \ \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

Dunque si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 4\sin^2 t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2 t + 8\cos t \sin^2 t\right) dt =$$

$$= \left[-2\frac{2t - \sin 2t}{4} + \frac{8}{3}\sin^3 t \right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

(d) Questo esrcizio ha la particolarità che ω può essere scritta come somma di una forma esatta e una non esatta, dunque

$$\omega = dF + \phi, \ F(x, y, z) = e^{x-y}, \ \phi = xydz$$

Passiamo al calcolo:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF + \int_\gamma \phi = F(\gamma(2)) - F(\gamma(1)) + \int_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix} dt =$$

$$= F\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ e^2 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e \end{pmatrix} + \int_1^2 e^t dt = e^2 + e^{\frac{3}{2}} - e - 1$$

2. Esercizio 2

Verificare se le seguenti forme sono esatte ed eventualmente trovare un potenziale:

(a) $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy$

(b) $xydx + (x^2 + 6y)dy$

(c) $udu + vdv$

(d) $ydx - x^2dy$

(e) $du + udv$

(f) $wdz - w^2dw$

Soluzione:

(a) Si: $F(x,y) = x^2y + y^3$.

(b) No.

(c) Si: $F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2}$.

(d) No.

(e) No.

(f) No.

3. Esercizio 3

Calcolare il flusso del campo $\vec{F}$ attraverso la superficie data usando il Teorema della Divergenza:

(a) $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^4 \end{pmatrix}$, S è superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ fra $z = -1$ e $z = 1$.

(b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}$, S è la superficie del cono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

(c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$, S è la superficie del cono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -1 \leq z \leq -x^2 - y^2\}$.

Soluzione:

(a) Il flusso di $\vec{F}$ attraverso S è

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \times \hat{n} dS = \int_V div\vec{F} dV$$

La divergenza di $\vec{F}$ è $div\vec{F} = 2 + 4z^3$, dunque (usando la classica parametrizzazione per i cilindri) si ha

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_V (2 + 4z^3) dV = \int_0^{2\pi} (\int_{-1}^{1} (\int_0^2 \rho(2 + 4z^3) d\rho) dz) d\alpha =$$

$$= 2\pi \left[2z + z^4\right]_{-1}^{1} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi$$

(b) Analogamente a quanto appena fatto si ha

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \times \hat{n} dS = \int_V div\vec{F} dV,\ div\vec{F} = 2x + 2y + 1$$

Il cilindro si parametrizza come

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0, \sqrt{z}] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in [0, 1] \end{cases},\ |\det J| = \rho$$

Dunque si ha

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_V (2x+2y+1) dV = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{z}} (\int_0^{2\pi} \rho(2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta+1) d\theta) d\rho) dz =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{z}} 2\pi\rho d\rho) dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(c) Come al solito:

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \times \hat{n} dS = \int_V div\vec{F} dV,\ div\vec{F} = 2 + 2z$$

La parametrizzazione è analoga all'esercizio precedente

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0, \sqrt{-z}] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in [-1, 0] \end{cases},\ |\det J| = \rho$$

Dunque si ha

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_V (2 + 2z) dV = \int_{-1}^0 (\int_0^{\sqrt{-z}} (\int_0^{2\pi} \rho(2 + 2z) d\theta) d\rho) dz =$$

$$= 4\pi \int_{-1}^0 (1 + z) \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{-z}} dz = 2\pi \int_{-1}^0 -z(1 + z) dz =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^0 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

4. Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali di forme lungo le curve chiuse date usando il Teorema di Gauss-Green:

(a)

$$\int_\gamma (y^2 dx + x dy),\ \gamma \text{ parametrizza } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$$

(b)

$$\int_\gamma (x^2y^3 dx + y dy),\ \gamma \text{ parametrizza il bordo di } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

Soluzione:

(a) Se A è il disco identificato da γ si ha che

$$\int_\gamma (y^2dx+xdy) = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}y^2\right) dA = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \rho(1-2\rho\sin\theta)d\theta)d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho d\rho = \pi$$

(b) Si ha che

$$\int_\gamma \left(x^2y^3dx + ydy\right) = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x^2y^3\right) dA = \int_1^2 (\int_0^{2\pi} \rho(-3\rho^4 \sin^2\theta\cos^2\theta)d\theta)d\rho =$$

$$= -2(\int_1^2 \rho^5 d\rho)(\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta) = -\frac{3}{4}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_1^2 (\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta) =$$

$$= -\frac{3}{8}\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right)\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{63}{8}\pi$$

5. Esercizio 5

Calcolare i seguenti integrali usando il Teorema di Stokes

(a)
$$\int_{\partial^+\Sigma} ((y-x)dx + (2y+z)dy - zdz),$$
con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2-z^2 = 0, \ x^2+y^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$ e $\partial^+\Sigma$ vista in senso antiorario sul piano xy.

(b)
$$\int_{\partial^+\Sigma} ((y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz),$$
con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ y = z\}$ e $\partial^+\Sigma$ vista in senso antiorario sul piano y=z vista da z.

(c)
$$\int_{\partial^+\Sigma} \left(\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2+z^2}\right),$$
con Σ superficie laterale $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$ e $\partial^+\Sigma$ vista in senso antiorario sul piano xy sulla faccia inferiore e in senso orario sulla faccia superiore.

NB: Il vero problema nell'applicazione del Teorema di Stokes è determinare precisamente la relazione che sussiste fra il verso del bordo della superficie e il verso della normale alla stessa. Ovviamente il verso del bordo è identificato dal verso della tangente, ed inoltre una volta che si sarà verificato il verso della normale rispetto alla superficie esso si manterrà tale lungo ogni componente connessa. Una relazione funzionante che può essere utilizzata è questa: detto $\vec{t}$ il vettore tangente alla superficie e $\vec{s}$ un vettore normale al vettore tangente rivolto verso l'interno del disco, si ha che $\hat{n}$ deve essere tale che $\hat{n} \times \left(\vec{t} \wedge \vec{s}\right)$

Soluzione:

(a) Notiamo che la forma non è esatta, dunque passiamo ad applicare il Teorema di Stokes.
Il Teorema di Stokes ci dice che

$$\int_{\partial^+\Sigma} ((y-x)dx + (2y+z)dy - zdz) = \int_\Sigma r\vec{ot}\vec{F} \times \hat{n} d\Sigma$$

detta $\vec{F} = \begin{pmatrix} y-x \\ 2y+z \\ -z \end{pmatrix}$. Per parametrizzare Σ si ha

$$\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in [0,2\pi] \text{ e } \rho \in [0,1]$$

e per trovare una normale si usa il fatto che la normale alla superficie è normale a entrambe le tangenti alla superficie, dunque

$$\varphi_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_\theta = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} : \vec{n} = \varphi_\rho \wedge \varphi_\theta =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$$

Dalla terza componente che si mantiene positiva si può vedere che il verso del vettore normale è quello giusto, dunque si può prendere come normale alla superficie il vettore $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\varphi_\rho \wedge \varphi_\theta\|}$. Calcoliamoci ora invece il rotore di $\vec{F}$:

$$r\vec{ot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & 2y+z & -z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dunque si avrà

$$\int_{\partial^+\Sigma} ((y-x)dx + (2y+z)dy - zdz) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\|\varphi_\rho \wedge \varphi_\theta\|} \begin{pmatrix} -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix} \|\varphi_\rho \wedge \varphi_\theta\| d\rho) d\theta =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta - \rho) d\theta) d\rho = \int_0^1 -2\pi\rho d\rho = -\pi$$

(b) Si vede facilmente che la forma è esatta (un potenziale è $xy+xz+yz$), e dato che il bordo di Σ è una curva chiusa l'integrale è zero.

(c) Notiamo che la forma non è esatta, dunque passiamo ad applicare il Teorema di Stokes.

Per parametrizzare Σ si ha

$$\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \in [0, 1]$$

Cerchiamo la normale:

$$\varphi_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \vec{n} = \varphi_\theta \wedge \varphi_z =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo inoltre che la normale è un versore. Passiamo al calcolo del rotore:

$$r\vec{o}t\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{x}{x^2+y^2+z^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}$$

Passiamo dunque al calcolo vero e proprio e applichiamo il Teorema:

$$\int_{\partial+\Sigma} \left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \int_\Sigma r\vec{o}t\vec{F} \times \hat{n} d\Sigma =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{2z\cos\theta}{(1+z^2)^2} \\ \frac{2z\sin\theta}{(1+z^2)^2} \\ \frac{2z^2}{(1+z^2)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta) dz =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^{1\pi} \frac{2z}{(1+z^2)^2} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) d\theta) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{2z}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi \left[-\frac{1}{1+z^2} \right]_0^1 = \pi$$

Grazie e buona fortuna!