Complemento 7

Topologia e successioni

Definizione 1 *Gli intervalli aperti di* $\mathbb{R}$ *sono gli insiemi della forma* (a,b) *dove* a *e* b *sono numeri reali oppure* $a=-\infty$ *oppure* $b=+\infty$.

Si noti che se $a=b\in\mathbb{R}$, l'intervallo (a,b) coincide con l'insieme vuoto (che è, dunque, un intervallo aperto); $\mathbb{R}$ è un intervallo aperto ($a=-\infty$ e $b=\infty$).
Si noti anche che l'intersezione di due intervalli aperti è un intervallo aperto, mentre, in generale, l'unione di due intervalli aperti non è un intervallo aperto.

Definizione 2 (i) *Un punto* $x\in E$ *si dice interno ad* E *se esiste un intervallo aperto* I *tale che* $x\in E$ *e* $I\subseteq E$. *Un punto* $x\in E$ *si dice isolato se esiste un intervallo aperto tale che* $I\cap E=\{x\}$.
(ii) *Un insieme* E *si dice aperto se ogni suo punto è un punto interno.*
(iii) *Un insieme* E *si dice chiuso se il suo complementare* $E^c:=\mathbb{R}\backslash E$ *è un insieme aperto.*

Esempio: Sia $A=(0,1)\cup(1,2)$ e $E=A\cup\{2,3\}$. L'insieme A è aperto; E non è né aperto né chiuso; il sottoinsieme dei punti interni di E è A; il punto 3 è un punto isolato; il punto 2 non è né isolato, né interno; $E\cup\{0,1\}=[0,2]\cup\{3\}$ è chiuso.

È immediato verificare che la famiglia $\mathcal{A}$ degli insiemi aperti di $\mathbb{R}$ forma una topologia (detta "topologia standard" di $\mathbb{R}$) ossia:

(τ_1) $\emptyset,\ \mathbb{R}\in\mathcal{A}$;

(τ_2) se $A_i\in\mathcal{A}$, $\forall\ i\in J$, allora $\displaystyle\bigcup_{i\in J}A_i\in\mathcal{A}$;

(τ_3) se $A_i\in\mathcal{A}$, per $1\le i\le n$, allora $\displaystyle\bigcap_{1\le i\le n}A_i\in\mathcal{A}$.

Passando ai complementari si ottiene immediatamente che la famiglia degli insiemi chiusi $\mathcal{C}$ verifica le seguenti proprietà:

(c_1) $\emptyset,\ \mathbb{R}\in\mathcal{C}$;

(c_2) se $C_i\in\mathcal{C}$, per $1\le i\le n$, allora $\displaystyle\bigcup_{1\le i\le n}C_i\in\mathcal{C}$;

(c_3) se $C_i\in\mathcal{C}$, $\forall\ i\in J$, allora $\displaystyle\bigcap_{i\in J}C_i\in\mathcal{C}$.

Osservazione 3 (i) La famiglia dei chiusi $\mathcal{C}$ non forma una topologia (poiché non è chiusa rispetto alle unioni arbitrarie).
(ii) Si noti che in generale un'intersezione arbitraria di aperti non è un insieme aperto e un'unione arbitraria di chiusi non è un insieme chiuso. Ad esempio,

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Big(0,1+\frac{1}{i}\Big)=(0,1]=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\Big[\frac{1}{i},1\Big]\ ,$$

e l'intervallo $(0,1]$ non né aperto né chiuso.

Lemma 4 *(i) Un punto $y \in E$ non è un punto interno per E se e solo se esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E^c$ tale che $\lim x_n = y$.*
(ii) Un insieme E non è chiuso se e solo se esiste una successione $\{x_n\} \subseteq C$ convergente e tale che $\lim x_n \in C^c$.

Dimostrazione (i) Se y non è un punto interno di E allora preso comunque in intervallo aperto I si deve avere $I \cap E^c \neq \emptyset$. Prendendo $I_n := (y - 1/n, y + 1/n)$ si ha quindi che, per ogni n esiste $x_n \in E^c$ tale che $|x_n - y| < 1/n$ e quindi $\lim x_n = y$.
Viceversa se esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E^c$ tale che $\lim x_n = y$, preso comunque un intervallo aperto I contenente y segue dalla definizione di limite che esiste N tale che $x_n \in I$ per ogni $n \geq N$.

(ii) E non chiuso equivale a E^c non aperto che equivale a dire che non tutti i suoi punto sono interni il che, per il punto (i), equivale a dire che esiste un punto $y \in E^c$ ed una successione in $(E^c)^c = E$ che converge a y. $\blacksquare$

Un corollario immediato del punto (ii) di questo lemma (che si ottiene per contrapposizione logica) è la seguente caratterizzazione degli insiemi chiusi:

Proposizione 5 *Un insieme C è chiuso se e solo se comunque presa una successione $\{x_n\} \subseteq C$ convergente si ha che $\lim x_n \in C$.*

Definizione 6 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto (o compatto per successioni) se comunque presa una successione in K esiste una sua sottosuccesione il cui limite appartiene a K.*

Teorema 7 *Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia K chiuso e limitato e sia $\{x_n\} \subseteq K$. Poiché $\{x_n\}$ è limitata, per il teorema di Bolzano–Weierstrass, è possibile estrarre una sottosuccession $\{x_{n_k}\}$ convergente e poiché K è chiuso, per la Proposizione 5, si ha che $\lim x_{n_k} \in K$.

Dimostriamo il viceversa per contrapposizione ed assumiamo quindi che K o non sia chiuso o non sia limitato. Se K non è chiuso, dal punto (ii) del Lemma 4, segue che esiste una successione $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $\lim x_n \notin K$ e quindi, poiché ogni sua sottosuccessione avrà lo stesso limite, non è possibile estrarre una sottosuccessione il cui limite sia in K. Sia, infine, K non limitato; ad esempio assumiamo che K non sia limitato superiormente. Allora, per ogni n, esisterà $x_n \in K$, tale che $x_n > n$. Allora, $\lim x_n = \infty = \lim x_{n_k}$ per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ e, di nuovo, da tale successione $\{x_n\}$ non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione il cui limite sia in K. $\blacksquare$

Definizione 8 (i) *Il derivato di un insieme E, $\mathcal{D}E$, è l'insieme di tutti gli $y \in \mathbb{R}$ tale che esiste una successione $\{x_n\} \subseteq E\backslash\{y\}$ il cui limite è y.*

(ii) *La chiusura di un insieme E, $\overline{E}$, è il più piccolo insieme chiuso che contiene E.*

(iii) *L'interno di un insieme E, $\mathring{E}$, è il più grande insieme aperto contenuto in E.*

La frontiera di E, ∂E, è definita come $\overline{E}\backslash\mathring{E}$.

Si osservi che, poiché l'intersezione di chiusi è chiusa e l'unione di aperti è aperta,

$$\overline{E} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_E} C \ , \qquad \mathring{E} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_E} A \ ,$$

dove abbiamo denotato con $\mathcal{C}_E$ e $\mathcal{A}_E$, rispettivamente, la famiglia di tutti i chiusi che contengono E e la famiglia di tutti gli aperti contenuti in E; chiaramente, per ogni insieme E, $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_E$ e $\emptyset \in \mathcal{A}_E$.

Proposizione 9 $\overline{E} = \{y \in \mathbb{R} |\ \exists\ x_n \in E \text{ con } \lim x_n = y\} = E \cup \mathcal{D}E.$

Dimostrazione Sia $D := \{y \in \mathbb{R} |\ \exists\ x_n \in E \text{ con } \lim x_n = y\}$. Ovviamente $E \subseteq D$ (se $y \in E$, basta prendere $x_n \equiv y$). Sia, ora, $\{x_n\} \subseteq D$ una successione convergente. Sia $y = \lim x_n$. Dalla definizione di D segue che, per ogni naturale k, x_k è limite di una successione $\{x_n^{(k)}\}$ in D. Poiché $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_k$, esisterà, per ogni k, un n_k tale che $|x_{n_k}^{(k)} - x_k| < 1/k$. Quindi,

$$\left|x_{n_k}^{(k)} - y\right| \le \left|x_{n_k}^{(k)} - x_k\right| + |x_k - y| < \frac{1}{k} + |x_k - y| \to 0.$$

Ma questo significa che $y \in D$ e quindi che D è chiuso (Proposizione 5). Sia ora C un chiuso che contiene E e sia $y \in D$. Per definizione di D, esiste una successione $\{x_n\}$ in E tale che $\lim x_n = y$, ma poiché $C \supseteq E$, tale successione è anche in C e, poiché C è chiuso, $\lim x_n \in C$ (ancora Proposizione 5), ossia $y \in C$. Dunque, $D \subseteq C$. Ma questo significa che D è il più piccolo chiuso contenente E e cioè $D = \overline{E}$.

Dimostriamo, ora, che $\overline{E} = E \cup \mathcal{D}E$. Chiaramente $\mathcal{D}E \subseteq \overline{E}$ e $E \subseteq \overline{E}$. Quindi , $E \cup \mathcal{D}E \subseteq \overline{E}$. Sia ora $y \in \overline{E}$. Poiché $\overline{E} = D$, esistono $x_n \in E$ tali che $\lim x_n = y$. Ci sono due casi: o esiste n tale che $x_n = y$, oppure, per ogni n, $x_n \neq y$. Nel primo caso $y \in E$, nel secondo $y \in \mathcal{D}E$. ∎

Proposizione 10 $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$.

Dimostrazione Sia $y \in \overline{E} \backslash \mathring{E}$. Dal punto (i) del Lemma 4 segue che esistono $x_n \in E^c$ tali che $x_n \to y$. Quindi, per la Proposizione 9, $y \in \overline{E^c}$ e $\partial E \subseteq \overline{E} \cap \overline{E^c}$. D'altra parte, $\mathring{E} \subseteq E$ e, passando ai complementari, $E^c \subseteq (\mathring{E})^c$ da cui[1] $\overline{E^c} \subseteq (\mathring{E})^c$. In conclusione,

$$\overline{E} \cap \overline{E^c} \subseteq \overline{E} \cap (\mathring{E})^c = \overline{E} \backslash \mathring{E} =: \partial E \ . \quad ∎$$

Concludiamo questa discussione con una breve nota sulla *connessione*, concetto che in $\mathbb{R}$ risulta banale.

Definizione 11 *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice connesso se comunque presi due punti $x < y \in E$ l'intervallo chiuso $[x, y] := \{z \in \mathbb{R} : \ x \le z \le y\}$ è tutto contenuto in E.*

Si verifica immediatamente che i connessi di $\mathbb{R}$ non sono altro che tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ (incluso, per convenzione, $\emptyset$). È anche immediato verificare

Lemma 12 *E è un intervallo di $\mathbb{R}$ (o, equivalentemente, un connesso di $\mathbb{R}$) se e solo se esistono intervalli compatti $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ tali che $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*

Ad esempio $[a, \infty) = \bigcup [a, n]$, o[2] $(a, b] = \bigcup \left[a + \frac{1}{n}, b\right]$.

[1] $(\mathring{E})^c$ è chiuso e, in generale se $A \subseteq B$, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

[2] Alcuni di tali intervalli potrebbero essere vuoti, ma certamente esiste N tale che $a + \frac{1}{n} < b$ se $[a, b)$ non è vuoto.