Appello B – 21/2/2011

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!*
• **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Dare la definizione di limite (finito e infinito) di una successione di numeri reali. Dimostrare, nel modo più completo possibile, che $\lim n^2 - n = +\infty$.
(ii) Discutere la definizione di $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
(iii) Dare la definizione di serie convergente e dimostrare che se $\sum a_n$ è convergente, allora $\lim a_n = 0$. È vero il viceversa?
(iv) Dare la definizione di funzione continua e di funzione uniformemente continua. Dimostrare che $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su $(0, 1)$.
(v) Dare la definizione di insieme chiuso e di insieme compatto. Dimostrare, nel modo più completo possibile, che $\{x :\ x^2 < 3\}$ non è compatto.

Es 2 [Pt. 24] Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(i)}\quad \lim \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^{n^2+\frac{1}{n}}\ ,\qquad \text{(ii)}\quad \lim \sqrt[n]{n^2 + 2^n}\ ,\qquad \text{(iii)}\quad \lim_{x\to\infty} \tanh\Big(x^2 \log\frac{x+1}{x}\Big)\ .$$

Es 3 [Pt. 24] Studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\text{(i)}\quad \sum \frac{n! + 3^n}{n^n}\ ,\qquad \text{(ii)}\quad \sum \frac{\log(n^n + n^2)}{n^3 + n^2}\ ,\qquad \text{(iii)}\quad \sum \Big(1 - \cos\Big(\frac{n^2 + n}{n^3 + 1}\Big)\Big)\ .$$

Es 4 [Pt 12] Definire la chiusura, l'interno e la frontiera di un insieme E e descriverli per l'insieme $E = (0, 1) \cup \Big(\mathbb{Q} \cap (1, 2)\Big)$.

Es 5 [Pt. 15] Dare la definizione di limsup e liminf e calcolare $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ con $a_n = \{\frac{5}{4}n\}$ (dove $\{\cdot\}$ denota "parte frazionaria di").