Complemento 6

Numerabilità e $\mathbb{R}$

Definizione 1 (i) *Un insieme A si dice numerabile se $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $a_n \neq a_m$ per ogni $n \neq m$.*
(ii) *Una biiezione tra due insiemi A e B è una funzione $\phi : A \to B$ iniettiva ($\phi(x) = \phi(y) \implies x = y$) e suriettiva ($\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in A$ t.c. $\phi(x) = y$).*
(iii) *Due insiemi si dicono equipotenti o che hanno la stessa cardinalità se esiste una biiezione tra loro.*

Osservazione 2 (i) Gli insiemi numerabili sono gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$.
(ii) $\mathbb{N}$ è ovviamente numerabile; $\mathbb{Z}$ è numerabile poiché $\mathbb{Z} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $a_1 = 0$, $a_{2n} = n$ e $a_{2n+1} = -n$.
(iii) Essere equipotenti è chiaramente una relazione d'equivalenza (esercizio).

Proposizione 3 *Siano F_n insiemi finiti con $F_n \cap F_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$. Allora $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ è numerabile.*

Dimostrazione Per ogni k sia $n_k \in \mathbb{N}$ il numero di elementi di F_k. Chiamiamo a_1, ..., a_{n_1} gli elementi (tutti distinti) di F_1; chiamiamo poi a_{n_1+1},..., $a_{n_1+n_2}$ gli elementi di F_2 (distinti tra loro e dagli elementi di F_1 per ipotesi), e così via ricorsivamente. Chiaramente $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$. ∎

Proposizione 4 *Siano A_1,..., A_n insiemi numerabili. Allora $A_1 \times \cdots \times A_n$ è numerabile.*

Dimostrazione Per induzione su n. Il caso $n = 1$ è ovviamente vero. Supponiamo dunque che per $n \geq 2$, $A = A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ sia numerabile e facciamo vedere che $A \times B$ con $B = A_n$ è numerabile. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$; sia poi $F_n := \{(a_k, b_m) : k + m = n + 1\}$. Chiaramente gli F_n sono insiemi finiti a due a due disgiunti e $A \times B = \bigcup_n F_n$. Dunque la tesi segue dalla Proposizione 3. ∎

Proposizione 5 *Siano A_n numerabili. Allora $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è numerabile.*

Dimostrazione Supponiamo per semplicità che $A_n \cap A_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$. Per definizione di numerabilità, per ogni n, abbiamo che $A_n = \{a_k^{(n)} : k \in \mathbb{N}\}$. Dunque la funzione $\phi : (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to a_k^{(n)} \in A$ è una biiezione tra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e A e quindi l'asserto segue dalla Proposizione 4. ∎

Teorema 6 $\mathbb{Q}$ *è numerabile.*

Dimostrazione Dalla Proposizione 4 segue che $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ è numerabile. Sia, dunque, $\{(p_n,q_n): n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ e sia $\phi:(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to p_n/q_n\in\mathbb{Q}$. Chiaramente, ϕ è suriettiva ma non iniettiva. Sia $n_1=1$ e $r_1:=\phi(p_1,q_1)$; sia, poi, $n_2=\min\{n:\phi(p_n,q_n)\neq r_1\}$ (chiaramente tale insieme è non vuoto poiché ϕ è suriettiva) e $r_2:=\phi(p_{n_2},q_{n_2})$; e induttivamente $n_{j+1}=\min\{n:\phi(p_n,q_n)\neq r_k,\ \forall\ k\leq j\}$ e $r_{j+1}:=\phi(p_{n_{j+1}},q_{n_{j+1}})$. Per costruzione, se $n_{j+1}>n_j+1$, $\phi(p_i,q_i)=\phi(p_j,q_j)$ per ogni $n_j\leq i\leq n_{j+1}-1$ e, in ogni caso, $r_j=\phi(p_{n_j},q_{n_j})\neq\phi(n_{p_{j+1}},q_{n_{j+1}})=r_{j+1}$. In conclusione, $\{r_j: j\in\mathbb{N}\}=\mathbb{Q}$. ∎

Definizione 7 $2^{\mathbb{N}}=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *è l'insieme delle successioni* $\sigma=\{\sigma_n\}$ *a valori in* $\{0,1\}$ *(ossia* σ_n *è 0 o 1 per ogni* n*).*

Osservazione 8 $2^{\mathbb{N}}$ si identifica naturalmente con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'insieme delle parti (ossia di tutti i sottoinsiemi) di $\mathbb{N}$ tramite la biiezione $\phi: A\subseteq\mathbb{N}\to\sigma=\phi(A)$ con $\sigma_n=1$ se e solo se $n\in A$.

Lemma 9 *Siano* A *e* B *sottoinsiemi numerabili e disgiunti di un insieme* X*. Allora* X *e* $X\backslash A$ *sono equipotenti.*

Dimostrazione Sia $A=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ e $B=\{b_n:n\in\mathbb{N}\}$ e sia $C=A\cup B$. Definiamo $\phi:X\to X\backslash A$ come segue: $\phi(x)=x$ se $x\in X\backslash C$; $\phi(a_n)=b_{2n}$ e $\phi(b_n)=b_{2n-1}$. Chiaramente ϕ è una biiezione tra X e $X\backslash A$. ∎

Teorema 10 $\mathbb{R}$ *ha la cardinalità di* $2^{\mathbb{N}}$*.*

Dimostrazione Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

1. Sia A il sottoinsieme di $2^{\mathbb{N}}$ formato dalla successione nulla $\sigma^0:=0$ ($\sigma^0_k=0,\ \forall k$) e da tutte le successioni definitivamente uguali a[1] 1. Si noti che A è numerabile[2]. Sia $X:=2^{\mathbb{N}}\backslash A$, e definiamo la seguente funzione

$$\phi:\sigma\in X\to\phi(\sigma)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_k}{2^k}\in(0,1)\ ;$$

si noti che ϕ è ben definita su tutto $2^{\mathbb{N}}$ e che $\phi(\sigma)=0$ se e solo se $\sigma=\sigma^0$ e che $\phi(\sigma)=1$ se e solo se $\sigma_k=1$ per ogni k (e che tale successione è un elemento di A). Siano $\sigma\neq\sigma'$ elementi di X; sia $m=\min\{n:\sigma_n\neq\sigma'_n\}$ (si noti che tale insieme non è vuoto poiché $\sigma\neq\sigma'$). Per un tale m si ha che $\sigma_m=0$ e $\sigma'_m=1$ o viceversa. Senza perdita di generalità supponiamo che $\sigma_m=0$, $\sigma'_m=1$ e che se $m>1$ allora $\sigma_k=\sigma'_k$ per ogni $k\leq m-1$ e, in tal caso,

[1] σ è definitivamente uguale ad 1 se esiste n tale che $\sigma_k=1\ \forall\ k\geq n$.

[2] $F_n:=\{\sigma\in 2^{\mathbb{N}}:\sigma_{n-1}=0 \text{ e } \sigma_k=1\ \forall k\geq n\}$ è finito e $A=\{\sigma^0\}\cup\bigcup_{n\geq1}F_n$.

poniamo $r_{m-1} := \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sigma_k}{2^k}$ mentre se $m = 1$ poniamo $r_0 := 0$. Poiché $\sigma_m = 0$, $\sigma'_m = 1$ e $\sigma \notin A$ (e quindi non è definitivamente uguale a 1)

$$\begin{aligned}
\phi(\sigma) &= r_{m-1} + \sum_{k=m+1} \frac{\sigma_k}{2^k} \\
&< r_{m-1} + \sum_{k=m+1} \frac{1}{2^k} \\
&= r_{m-1} + \frac{1}{2^m} = r_{m-1} + \frac{\sigma'_m}{2^m} \le r_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sigma'_k}{2^k} \\
&= \phi(\sigma')
\end{aligned}$$

e quindi ϕ è iniettiva.
Sia $x \in (0,1)$ e definiamo, iterativamente, la seguente successione σ. Per $n = 1$, poniamo

$$\sigma_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1, \end{cases}$$

e si noti che

$$r_1 := \frac{\sigma_1}{2} \le x < r_1 + \frac{1}{2} \le 1.$$

Supponiamo ora che $n \ge 1$ e che σ_1,..., σ_n siano tali che

$$r_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{2^k} \le x < r_n + \frac{1}{2^n} \le 1 \tag{1}$$

e definiamo

$$\sigma_{n+1} := \begin{cases} 0, & \text{se } r_n \le x < r_n + \frac{1}{2^{n+1}}, \\ 1, & \text{se } r_n + \frac{1}{2^{n+1}} \le x < r_n + \frac{1}{2^n}. \end{cases} \tag{2}$$

Da tale definizione segue che (1) vale con $n+1$ al posto di n (e dunque, per induzione, vale per ogni $n \in \mathbb{N}$). Per tale sequenza σ si ha che $\lim r_n = \phi(\sigma)$ e da (1) segue che $x = \phi(x)$. Quindi ϕ è suriettiva. Abbiamo dimostrato che X e $(0,1)$ sono equipotenti.

2. $(0,1)$ è equipotente a $\mathbb{R}$: ad esempio $x \to \phi(x) = \operatorname{cotan} \pi x$ è una biiezione tra $(0,1)$ e $\mathbb{R}$. Quindi X è equipotente a $\mathbb{R}$.

3. Sia $B := \{\sigma^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ dove $\sigma^{(k)}$ è la successione con $\sigma^{(k)}_j = 1$ se $j \le k$ e $\sigma^{(k)}_j = 0$ se $j \ge k+1$. Chiaramente $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subset 2^{\mathbb{N}}$. Dunque per il Lemma 9 segue che $2^{\mathbb{N}}$ e X sono equipotenti. Per transitività segue la tesi del teorema. ∎

Esercizio Data una famiglia numerabile di insiemi numerabili $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ con $A_k = \{a_j^{(k)} : j \in \mathbb{N}\}$, trovare una numerazione esplicita di $\cup_n A_n$ che "continui" la seguente numerazione: $a_1 = a_1^{(1)}$, $a_2 = a_2^{(1)}$, $a_3 = a_2^{(2)}$, $a_4 = a_1^{(2)}$, $a_5 = a_3^{(1)}$, $a_6 = a_3^{(2)}$, $a_7 = a_3^{(3)}$, $a_8 = a_2^{(3)}$, $a_9 = a_1^{(3)}$, $a_{10} = a_4^{(1)}$, ..., $a_{2009} = a_{17}^{(45)}$,...

[**Risposta:** siano $q_n := [\sqrt{n}]$ ($[\cdot]$=parte intera di $\cdot$), $i_n := n - q_n^2$, $k_n := \min\{i_n, q_n + 1\}$ e $j_n := \min\{2(q_n + 1) - i_n, q_n + 1\}$. Allora $a_n = a_{q_n}^{(1)}$ se $i_n = 0$ e $a_n = a_{j_n}^{(k_n)}$ altrimenti.]