Complemento 3

Serie doppie

Lemma 1 *Siano $\alpha_{nk} \ge 0$ tali che, per ogni n e k, $\alpha_{n+1k} \ge \alpha_{nk}$ e $\alpha_{nk+1} \ge \alpha_{nk}$. Allora*

$$\sup_{n,k} \alpha_{nk} = \sup_n \sup_k \alpha_{nk} = \sup_k \sup_n \alpha_{nk}. \tag{1}$$

Dimostrazione Basta dimostrare la prima uguaglianza in (1) (l'altra si ottiene applicando quanto dimostrato a $\alpha'_{nk} = \alpha_{kn}$).

Sia $\alpha = \sup_{n,k} \alpha_{nk}$. Vi sono due casi: $\alpha = \infty$ oppure $\alpha < \infty$. Nel primo caso, per ogni M esistono n_0 e k_0 tali che $\alpha_{n_0k_0} > M$. Quindi se $N := \max\{n_0, k_0\}$ e $n, m \ge N$, si ha $\alpha_{nk} > M$ (essendo α_{nk} crescente in k ed n). Se denotiamo con $\beta_n = \sup_k \alpha_{nk}$ si ha che $\beta_n > M$ per ogni $n \ge N$ il che significa che $\sup_n \beta_n = \infty = \alpha$, che è quanto volevamo dimostrare.

Supponiamo ora che $\alpha < \infty$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esistono n_0 e k_0 tali che $\alpha \ge \alpha_{n_0k_0} > \alpha - \varepsilon$. Quindi se $N := \max\{n_0, k_0\}$ e $n \ge N$ si ha che $\alpha \ge \sup_k \alpha_{nk} =: \beta_n > \alpha - \varepsilon$, il che significa che $\sup \beta_n = \alpha$. ∎

Corollario 2 (Serie doppie) *Se $a_{nk} \ge 0$ allora*[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \Big) \ . \tag{2}$$

Inoltre se una dei termini di questa equazione è finito, è finito anche l'altro e, denotando α tale valore comune, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{M} a_{nk} - \alpha \Big| < \varepsilon \ , \qquad \forall\ N, M \ge N_0 \tag{3}$$

Infine se $a_{nk} \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \Big) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| \Big) < \infty \tag{4}$$

e, se vale una delle disuguaglianze in (4), allora valgono (2) e (3).

[1] Normalmente scriveremo $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ al posto di $\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \Big)$.

Dimostrazione Se prendiamo $\alpha_{nk} := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{ij}$, con $a_{ij} \geq 0$ si vede immediatamente che $\alpha_{n+1k} \geq \alpha_{nk}$ e $\alpha_{nk+1} \geq \alpha_{nk}$ e quindi , per il Lemma 1, si ottiene immediatamente (2).

Eq. (3) deriva dal fatto che $\alpha = \sup_{n,k} \alpha_{nk}$.

Infine, nel caso $a_{nk} \in \mathbb{R}$, la (4) deriva immediatamente dal caso a termini positivi già trattato. Assumiamo poi una delle disuguaglianze in (4). Per ottenere la (2), poniamo $a^+_{nk} := \max\{a_{nk}, 0\}$, $\alpha^-_{nk} := \max\{-a_{nk}, 0\}$. Allora $0 \leq a^\pm_{nk} \leq |a_{nk}|$ e $a_{nk} = a^+_{nk} - a^-_{nk}$ e applicando la prima parte del corollario alle due serie doppie con termini positivi a^+_{nk} e a^-_{nk} otteneniamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a^+_{nk} - a^-_{nk}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a^+_{nk} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a^-_{nk} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a^+_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a^-_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(a^+_{nk} - a^-_{nk}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \ .
\end{aligned}
$$

Infine, se $\alpha \in \mathbb{R}$ denota il valore comune in (2) e se scriviamo $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ con $\alpha^\pm := \max\{\pm\alpha, 0\}$, si ha che

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M} a_{nk} - \alpha\Big| &= \Big|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}\Big((a^+_{nk} - \alpha^+) - (\alpha^-_{nk} - \alpha^-)\Big)\Big| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}|a^+_{nk} - \alpha^+| + \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}|\alpha^-_{nk} - \alpha^-|
\end{aligned}
$$

e la (3) segue immediatamente dal caso a termini positivi. ∎

Esempio 3 Siano, per $0 \leq k \leq n$, $c_{nk} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| < \infty$$

allora[2]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}. \tag{5}$$

[2] La (5) significa che, se $b_n := \sum_{k=0}^{n} c_{nk}$, la serie $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, che le serie $c_k := \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}$ convergono per ogni n e che $\sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{k\geq 0} c_k$.

Tale relazione segue dal Corollario 2 ponendo

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} c_{nk}, & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{altrimenti} . \end{cases}$$