Complemento 2

Osservazioni su potenze, esponenziale e logaritmo

Continuità delle potenze

Proposizione 1 *Sia x un numero reale diverso da zero e $\{a_n\}$ una successione di numeri tale che $a_n \geq 0$ e $\lim a_n = a$. Allora $\lim a_n^x = a^x$.*

Dimostrazione Poiché $a_n \geq 0$ si ha che $a := \lim a_n \geq 0$. Distinguiamo vari casi.

(i) Assumiamo $x > 0$ e $a = 0$. Sia $\varepsilon > 0$; esiste $N \in \mathbb{Z}_+$ tale che $a_n < \varepsilon^{1/x}$ per ogni $n \geq N$, e dunque, per tali n, $a_n^x < \varepsilon$, il che vuol dire $\lim a_n^x = 0$.

(ii) Assumiamo $x > 0$ e $a = 1$. Sia p un intero positivo tale che $p > x$ e poniamo $b_n = a_n - 1$. Allora, $\lim b_n = 0$ ed esiste N tale che $|b_n| < 1$ per ogni $n \geq N$ e, per tali n,

$$(1 - |b_n|)^p \leq (1 - |b_n|)^x \leq (1 + b_n)^x < (1 + |b_n|)^x < (1 + |b_n|)^p \ .$$

Ma le successioni a sinistra e a destra di queste disuguaglianze tendono a 1 (p è un intero e "il prodotto dei limiti è il limite del prodotto") e quindi per il teorema del confronto per successioni anche $(1 + b_n)^x = a_n^x$ tende a 1.

(iii) Assumiamo $x > 0$ e $a > 0$. Allora, $\lim \dfrac{a_n^x}{a^x} = \lim \left(\dfrac{a_n}{a}\right)^x = 1$ e dunque $\lim a_n^x = a^x$.

(iv) Assumiamo $x < 0$ e $a > 0$. Allora, dalla definizione di potenza con esponente negativo e da (iii) segue che

$$\lim a_n^x = \lim \frac{1}{a_n^{-x}} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x \ .$$

La dimostrazione è completa. ∎

La serie esponenziale

Definizione 2 *Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{1}$$

Dal criterio del rapporto segue che la serie in (1) converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, per ogni x si ha che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \ . \tag{2}$$

Si ricorda che la successione

$$e_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$$

è strettamente crescente e limitata e che, per definizione, il suo limite è il numero di Nepero

$$e := \lim e_n = \lim \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \ ;$$

inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = e^x \ . \tag{3}$$

Teorema 3 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.*

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \ \frac{x^k}{k!} \ , \qquad \text{con} \quad a_{nk} := \frac{n!}{(n-k)! n^k} \ . \tag{4}$$

Si noti che $a_{nk} > 0$ per ogni $n \geq k \geq 0$ e che

$$\begin{aligned} & a_{n0} = 1 \ , \qquad a_{n1} = 1 \ , \qquad && \forall \ n \\ & a_{nk} = \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)}_{(k-1) \text{ termini}} < 1 \ , \quad && \forall \ n \geq k \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Si osservi anche che, per ogni k

$$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 1 \ . \tag{6}$$

Ora, se $n > m \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Big| \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \ \frac{x^k}{k!} \Big| \quad &= \quad \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_{nk} \ \frac{x^k}{k!} \Big| \\ &\leq \quad \sum_{k=m+1}^{n} a_{nk} \ \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \quad \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \ . \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$, ricordando la (3) e la (6), si ottiene

$$\Big| e^x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \Big| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \ .$$

Prendendo ora il limite per $m \to \infty$ in quest'ultima relazione e ricordando la (2) si ha la tesi. ∎

È interessante stimare i "resti" della serie esponenziale.

Proposizione 4 *Sia* $0 < t < n+1$ *con* $n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$0 < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{t^n}{n!} \ \frac{n+1}{n+1-t} \ . \tag{7}$$

In particolare,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{1}{n!} \ \frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n-1)!} \ \frac{1}{n-1} \ , \qquad \forall \ 0 < t \le 1 \ , \tag{8}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < 2 \ \frac{t^n}{n!} \ , \qquad \forall \ 0 < t \le \frac{n+1}{2} \ . \tag{9}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} &= \frac{t^n}{n!} \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+2)(n+1)} + \frac{t^3}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots \Big) \\
&< \frac{t^n}{n!} \Big(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+1)^2} + \frac{t^3}{(n+1)^3} + \cdots \Big) \\
&= \frac{t^n}{n!} \ \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{t}{n+1} \Big)^k = \frac{t^n}{n!} \ \frac{n+1}{n+1-t} \ .
\end{aligned}$$

Le (8) e (9) sono conseguenza immediata di (7). ∎

Teorema 5 *Il numero di Nepero è irrazionale.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con p e q numeri naturali co–primi. Dal Teorema 3 si ha che $e = \exp(1)$ e quindi, da (8) segue che

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!} \ \frac{1}{q} \ .$$

Moltiplicando tale relazione per $q!$ otterremmo

$$0 < N := p\ (q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q} < 1\ ,$$

il che è impossibile essendo N un numero intero[1]. ∎

Logaritmi

Proposizione 6 *Per ogni $a > 0$ e diverso da 1 e per ogni $x > 0$ esiste un unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = x$. Tale y prende il nome di logaritmo in base a di x e si denota con $\log_a x$. Dunque*

$$a^{\log_a x} = x\ , \qquad \forall\ x \in (0, \infty)\ . \tag{10}$$

Il logaritmo gode delle seguenti proprietà:

(i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall\ x, y \in (0, \infty)$.

(ii) $\log_a x^y = y \log_a x$, $\forall\ x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

(iii) *Sia $x < y$. Allora $\log_a x < \log_a y$ se $a > 1$ e $\log_a x > \log_a y$ se $a < 1$.*

(iv) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, $\forall\ a, b, x \in (0, \infty)$, $a \neq 1 \neq b$.

Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso $a > 1$.
Fissiamo $x > 0$ e sia $A := \{t \in \mathbb{R} :\ a^t < x\}$. Poiché $\lim a^{-n} = 0$, $A \neq \emptyset$ e poiché $\lim a^n = \infty$ segue che esiste n tale che $x < a^n$ e quindi tale n è un maggiorante per[2] A. Sia $y = \sup A$. Supponiamo (per assurdo) che $a^y < x$. Sia $t_n = y + \frac{1}{n}$. Poiché $0 < a^{t_n} - a^y \to 0$, segue che esiste n tale che[3] $a^y < a^{t_n} < x$. Ma allora $y < t_n \in A$ e y non sarebbe un maggiorante. Supponiamo (ancora per assurdo) che $a^y > x$ e sia $s_n = y - \frac{1}{n}$. Di nuovo, esisterebbe $s_n =$ tale che $a^y > a^{s_n} > x$, il che implicherebbe che $s_n < y$ è un maggiorante contraddicendo la definizione di y. Quindi $y = a^x$ provando l'esistenza del logaritmo con base $a > 1$.
Per $0 < a < 1$, *definiamo*

$$\log_a x := -\log_{1/a} x\ . \tag{11}$$

Quindi se $a < 1$

$$a^{\log_a x} := a^{-\log_{1/a} x} = \frac{1}{a^{\log_{1/a} x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_{1/a} x} = x\ ,$$

[1] $q!/k! \in \mathbb{N}$ per ogni $0 \le k \le q$.
[2] Si ricordi che $x \to a^x$ è strettamente crescente se $a > 1$.
[3] Definizione di limite con $\varepsilon = x - a^y > 0$.

mostrando che la proprietà fondamentale (10) vale per ogni $0 < a \neq 1$.
L'unicità segue dal fatto che $a^s < a^t$ se $s < t$.
Dalle proprietà di a^x e da (10) segue che

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)} ,$$

e dall'unicità segue (i).
Analogamente

$$a^{\log_a (x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x} ,$$

e dall'unicità segue (ii).
(iii) nel caso $a > 1$ segue dalla stretta crescenza di a^x e per $a < 1$ dalla stretta decrescenza di a^x.
Infine,

$$a^{\log_a b \cdot \log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x}$$

e (sempre per l'unicità) segue (iv). ∎

Definizione 7 *Se* $x > 0$ *chiamiamo logaritmo naturale di* x *e lo denotiamo con* $\log x$ *il logaritmo in base e di* x

$$\log x := \log_e x .$$

Lemma 8

$$\log(1+t) < t , \qquad \forall\ t > 0 \tag{12}$$

$$|\log(1+t)| \leq 2|t| , \qquad \forall\ |t| \leq \frac{1}{2} . \tag{13}$$

Dimostrazione Per $t > 0$, $1 + t < e^t$ (per il Teorema 3), e prendendo il logaritmo di tale relazione (poiché i logaritmi in base $a > 1$ sono funzioni strettamente crescenti dell'argomento) segue la (12). Sia ora $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$ e poniamo $t = -s$ cosicché $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ e si noti che, in tal caso,

$$0 < \frac{1}{1-s} \leq 1 + 2s .$$

Allora, per tali s, dalle proprietà del logaritmo e dalla (12) segue che[4]

$$|\log(1+t)| = |\log(1-s)| = \log \frac{1}{1-s} \leq \log(1+2s) \leq 2s = 2|t| ,$$

che insieme alla (12) implica anche la (13). ∎

[4]Se $|s| \leq 1/2$ allora $(1-s)^{-1} \leq 1 + 2s$.

Proposizione 9 (continuità dei logaritmi) *Sia* $1 \neq a > 0$ *e sia* $\{x_n\}$ *una successione di numeri tale che* $x_n > 0$ *e* $\lim x_n = x > 0$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x \ . \tag{14}$$

Dimostrazione Consideriamo prima il caso in cui $a = e$. Sia $y_n := x_n/x$ cosicché $\lim y_n = 1$. Quindi esiste N tale che $|y_n - 1| < 1/2$ per ogni $n \geq N$; per tali n, dalle proprietà del logaritmo e da (13) segue che

$$|\log x_n - \log x| = |\log(x_n/x)| = |\log y_n| = |\log[1 + (y_n - 1)]| \leq 2|y_n - 1| \to 0 \ ,$$

che è la (14) nel caso $a = e$. Tutti gli altri casi derivano dalla relazione (iv) della Proposizione 6 con $b = e$.

<u>Due limiti notevoli</u>

Proposizione 10 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali diversi da zero e tale che* $\lim a_n = 0$ *allora*[5]*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \ , \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1 \ . \tag{16}$$

Dimostrazione Dal Teorema 3 segue che

$$e^t = 1 + t + r_2(t) \ , \qquad r_2(t) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ , \tag{17}$$

e dalla Proposizione 4 segue che

$$|r_2(t)| \leq t^2 \ , \qquad \forall \ |t| \leq \frac{3}{2} \ . \tag{18}$$

Quindi:

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \frac{a_n + r_2(a_n)}{a_n} = 1 + \frac{r_2(a_n)}{a_n} \ ,$$

e, dalla (18), segue che[6]

$$\lim \left| \frac{r_2(a_n)}{a_n} \right| \leq \lim |a_n| = 0 \ ,$$

[5] Per dar significato al secondo limite bisogna assumere che $1 + a_n > 0$, ma $a_n \to 0$ e quindi gli a_n sono definitivamente minori di 1 in modulo cosicché $1 + a_n > 0$ per $n \geq N$ per un certo $N \in \mathbb{N}$ a partire dal quale considereremo la successione $\log(1 + a_n)$.

[6] Si noti che esiste N tale che per ogni $n \geq N$, $|a_n| < 3/2$.

che implica la (15).

La (16) segue immediatamente dalla (15) osservando che se si pone $b_n := \log(1 + a_n)$ si ha che $\lim b_n = 0$ (Proposizione 9) e

$$\lim \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = \lim \frac{b_n}{e^{b_n} - 1} = 1. \quad \blacksquare$$