

PAC - PROBABILITA' AL CALCOLATORE 2007-2008
RUDIMENTI SULLA SIMULAZIONE DI VARIABILI ALEATORIE

Numeri pseudo-random. La simulazione di (sequenze di) numeri aleatori tramite calcolatore è un argomento molto studiato e con notevoli applicazioni. Per chi fosse interessato, al tema sono dedicati ampi spazi sul web, si veda per es. il sito <http://random.mat.sbg.ac.at>. Per gli scopi di questo corso ci accontentiamo delle funzioni standard incluse nei comuni linguaggi di programmazione.

Nel linguaggio C (l'unico a cui faremo esplicito riferimento in seguito) per esempio, si può utilizzare la funzione `drand48()`, che fornisce un numero reale pseudo-random nell'intervallo $[0, 1]$. La funzione `drand48()` utilizza un algoritmo *lineare congruenziale*, si basa cioè sull'iterazione di una mappa del tipo

$$X_{n+1} = (aX_n + c)_{\text{mod } m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove m è un intero molto grande e a e c sono interi scelti in maniera opportuna. Il punto di partenza X_0 della iterazione è detto *seme*. Il valore del seme è fissato tramite il comando `srand48(seme)`.

Variabili uniformi in $[0, 1]$. Vediamo alcuni esempi di uso concreto della funzione `drand48()`. Il semplice programma riportato qui sotto produce e mostra un numero r nell'intervallo $[0, 1]$.

```
/* Una variabile in [0,1] con seme fissato */
# include <stdlib.h>
# include <stdio.h>
int main(void) {
    double r;
    srand48(127657);
    r = drand48();
    printf("r=%f", r);
    return 0;
}
```

Poiché il seme è fissato (pari a 127657 nell'esempio) il numero r sarà sempre lo stesso ogni volta che si fa girare il programma. Il seme va quindi cambiato a ogni giro per avere *sequenze* di numeri pseudo-random. Per comodità si può aggiornare il seme automaticamente tramite il timer interno della macchina, come illustrato dal seguente programma.

```
/* Una variabile in [0,1] con seme aggiornato */
# include <stdlib.h>
# include <stdio.h>
# include <time.h> /* Notare l'inclusione della libreria <time.h> */
int main(void) {
    double r;
    srand48((unsigned)time(NULL));
    r = drand48();
    printf("r=%f", r);
    return 0;
}
```

Questa volta il programma restituisce un valore di r ogni volta differente, che per i nostri scopi può essere interpretato come una variabile “distribuita uniformemente” in $[0, 1)$. Inoltre, il valore di r ad ogni esecuzione è con buona approssimazione *indipendente* dai valori ottenuti nelle esecuzioni precedenti.

Media empirica e scarto quadratico medio. La bontà del generatore così ottenuto verrà testata in seguito in diversi modi. Una prima verifica si può basare sul calcolo della *media empirica*

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i, \quad (0.1)$$

dove r_1, r_2, \dots, r_n sono i numeri ottenuti attraverso n successive applicazioni del programma.

Un'altra verifica della bontà del generatore può essere basata sullo *scarto quadratico medio*

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - m_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 - m_n^2. \quad (0.2)$$

La grandezza v_n verrà anche chiamata *varianza empirica*. Vediamo ora un primo programma che permette di calcolare media e varianza empirica per n variabili indipendenti, uniformi in $[0, 1]$.

```
/* n variabili indipendenti uniformi in [0,1] */

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <time.h>

int main(void) {
    double r,m,v;
    int k,n;
    srand48((unsigned)time(NULL));

    printf("numero variabili da simulare:");
    scanf("%d",&n);

    m=0;
    v=0;
    for (k=0; k < n; k++){
        r = drand48();
        m+=r;
        v+=r*r;}
    m = ((double) m / n);
    v = ((double) v / n) - m*m;
    printf("media empirica = %f", m);
    printf("varianza empirica = %f", v);
    return 0;
}
```

Si osserverà che al crescere di n , le grandezze m_n e v_n si stabilizzano intorno ai valori teorici

$$m_n \sim \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad v_n \sim \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

corrispondenti a media e varianza della variabile uniforme in $[0, 1]$. Insistiamo che tutto questo, ovviamente, non garantisce la bontà del generatore, ma costituisce solo una prima verifica.