PAC - MAGGIO 2005

E 9. Metodo della trasformazione per v.a. continue.

1. *Esponenziale:* Simulare la v.a. continua X con densità
$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\,, \qquad t \in [0,\infty)\,,$$
nei diversi casi $\lambda = 0.1, 1, 10$. Calcolare media e varianza empirica su un numero n di prove e confrontare graficamente con i valori teorici
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\,, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$
Si esegua poi la seguente verifica della legge dei grandi numeri. Su n lanci calcoliamo la funzione
$$f_n(\varepsilon) = \chi\left(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\varepsilon\right)\,,$$
dove Z_k, $k = 1,\dots,n$ sono copie indipendenti della variabile $X - \frac{1}{\lambda}$. Se ripetiamo l'esperimento un numero m di volte (per es. $m = 10^4$) otteniamo una successione di valori $f_n^1(\varepsilon), f_n^2(\varepsilon), \dots, f_n^m(\varepsilon)$ e indichiamo con $u_{m,n}(\varepsilon) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_n^i(\varepsilon)$ la corrispondente media empirica. Graficando la $u_{m,n}(\varepsilon)$ per diversi valori di n (e.g. $n = 100, 200, \dots, 10000$) e per es. $\varepsilon = 0.05$ si osserverà che $u_{m,n}(\varepsilon)$ si avvicina a 0 al crescere di n (per m e ε fissati). Osservare il legame con la legge dei grandi numeri (debole) che assicura che per ogni $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\varepsilon\right) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

2. *Cauchy:* Si ripeta l'esperimento proposto al punto 1 per la v.a. X con densità
$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,, \qquad t \in (-\infty,\infty)\,.$$
Poiché la v.a. X (detta di Cauchy) non ha valor medio, $\mathbb{E}|X| = +\infty$, si osserverà che le misure non si stabilizzano. Inoltre si può osservare che i valori $u_{m,n}(\epsilon)$ calcolati come sopra (scegliendo questa volta le Z_k come copie indipendenti della X) non soddisfano $u_{m,n}(\epsilon) \to 0$, $n \to \infty$ cioè la v.a. di Cauchy viola la legge dei grandi numeri.

Suggerimenti

E 9. Il metodo della trasformazione può essere brevemente illustrato come segue. Sia X una v.a. continua con densità $f(t)$, $t \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. La funzione di distribuzione associata è $F(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x] = \int_{x_1}^{x} f(t)dt$. Pertanto si ha
$$\mathbb{P}\big[X \in [a,b]\big] = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\,, \quad x_1 \leqslant a \leqslant b \leqslant x_2\,. \tag{0.1}$$
Se Y è v.a. uniforme in $[0,1]$ allora la (0.1) equivale a $\mathbb{P}\big[Y \in [F(a),F(b)]\big]$. In particolare, se $F : [x_1,x_2] \to [0,1]$ è strettamente crescente allora abbiamo $\{X \in [a,b]\} \iff \{F(X) \in [F(a),F(b)]\}$ e la (0.1) stabilisce che la v.a. $Y = F(X)$ è distribuita uniformemente in $[0,1]$, qualunque sia la distribuzione di X. Invertendo F otteniamo che X è distribuita come $F^{-1}(Y)$. Quindi se si dispone di un'espressione esplicita per F^{-1} il metodo della trasformazione permette di simulare X calcolando $F^{-1}(Y)$ dove Y è uniforme in $[0,1]$. Nei casi proposti:

- se $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$ allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$. Quindi
$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)\,, \quad y \in (0,1)\,.$$
- se $f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ si ha $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x$. Invertendo:
$$F^{-1}(y) = \mathrm{tg}\,[\pi(y - \frac{1}{2})]\,, \quad y \in (0,1)\,.$$

---

caputo@mat.uniroma3.it.