PAC - MARZO 2005

E 1. Variabili uniformi in $[0,1]$.

Simulare n variabili aleatorie $X_1,\dots,X_n$ indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $[0,1]$. Calcolare la media empirica

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{0.1}$$

e la varianza empirica (scarto quadratico medio)

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - m_n\right)^2 . \tag{0.2}$$

Graficarne l'andamento per diversi valori di n e osservare che per n grandi

$$m_n \sim \frac{1}{2}\,, \qquad v_n \sim \frac{1}{12}\,.$$

Discutere la stabilità delle misure, per esempio: a partire da quali valori di n si ha tipicamente $|m_n - 1/2| \leqslant 0.01$, $|v_n - 1/12| \leqslant 0.01$.

E 2. Prove di Bernoulli

Simulare n v.a. $Y_1,\dots,Y_n$ indipendenti, ciascuna distribuita come una variabile di Bernoulli di parametro p. Calcolare la corrispondente media e varianza (vedi (0.1) e (0.2)) nei casi $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ e graficarne l'andamento al variare di n. Osservare che per n grande si ha

$$m_n \sim p\,, \qquad v_n \sim p(1-p)\,.$$

Discutere la stabilità delle misure.

E 3. Gioco delle tre porte.

Ci sono tre porte. Dietro una a caso delle tre c'è un premio, dietro le rimanenti due il vuoto. Scegliamo una delle porte. A questo punto il presentatore Monty Hall apre una delle due porte che rimangono dopo la nostra scelta, mostrando il vuoto. Rimangono quindi due porte chiuse una delle quali nasconde il premio. Abbiamo la scelta fra tre strategie:

a) rimaniamo con la porta scelta all'inizio
b) cambiamo porta
c) tiriamo una moneta, se è testa rimaniamo, se è croce cambiamo

Simulare un numero n di prove del gioco e graficare la frequenza f_a, f_b, f_c di vittorie con le diverse strategie a, b, c. Osservare che per n grande si ha $f_a \sim \frac{1}{3}$, $f_b \sim \frac{2}{3}$, $f_c \sim \frac{1}{2}$.

Per una rappresentazione del gioco delle tre porte si consulti il sito: `http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/LetsMakeaDeal.html`

---

caputo@mat.uniroma3.it.