PAC - MAGGIO 2004

E 9. Metodo della trasformazione per v.a. continue.

1. *Esponenziale:* Simulare la v.a. continua X con densità

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\,, \qquad t \in [0, \infty)\,,$$

nei diversi casi $\lambda = 0.1, 1, 10$. Calcolare media e varianza empirica su un numero n di prove e confrontare graficamente con i valori teorici $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

Si esegua poi la seguente verifica della legge dei grandi numeri. Su n lanci calcoliamo la funzione

$$f_n(\epsilon) = \mathbb{I}(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\epsilon)\,,$$

dove Z_k, $k = 1, \ldots, n$ sono copie indipendenti della variabile $X - \frac{1}{\lambda}$. Se ripetiamo l'esperimento un numero m di volte (per es. $m = 10^4$) otteniamo una successione di valori $f_n^1, f_n^2, \ldots, f_n^m$ e indichiamo con $u_{m,n}(\epsilon)$ la corrispondente media empirica. Graficando la $u_{m,n}(\epsilon)$ per diversi valori di $n >> 1$ e per es. $\epsilon = 0.01$ si osserverà che $u_{m,n}(\epsilon)$ si avvicina a 0 al crescere di n (per m fissato). Ciò è conseguenza della legge dei grandi numeri che assicura che per ogni $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} Z_k| \geqslant n\epsilon) \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

2. *Cauchy:* Si ripeta l'esperimento proposto al punto 1 per la v.a. X con densità

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\,, \qquad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Poiché la v.a. X (detta di Cauchy) non ha valor medio, $\mathbb{E}|X| = +\infty$, si osserverà che le misure non si stabilizzano. Inoltre si può osservare che i valori $u_{m,n}(\epsilon)$ calcolati come sopra (scegliendo questa volta le Z_k come copie indipendenti della X) non soddisfano $u_{m,n}(\epsilon) \to 0$, $n \to \infty$ cioè la v.a. di Cauchy viola la legge dei grandi numeri.

Suggerimenti

Il metodo della trasformazione può essere brevemente illustrato come segue. Sia X una v.a. continua con densità $f(t)$, $t \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. La funzione di distribuzione associata è $F(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x] = \int_{x_1}^{x} f(t)dt$. Pertanto si ha

$$\mathbb{P}[X \in [a, b]] = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\,, \quad x_1 \leqslant a \leqslant b \leqslant x_2\,. \tag{0.1}$$

Se Y è v.a. uniforme in $[0, 1]$ allora la (0.1) equivale a $\mathbb{P}[Y \in [F(a), F(b)]]$. In particolare, se $F : [x_1, x_2] \to [0, 1]$ è strettamente crescente allora abbiamo $\{X \in [a, b]\} \iff \{F(X) \in [F(a), F(b)]\}$ e la (0.1) stabilisce che la v.a. $Y = F(X)$ è distribuita uniformemente in $[0, 1]$, qualunque sia la distribuzione di X. Invertendo F otteniamo che X è distribuita come $F^{-1}(Y)$. Quindi se si dispone di un'espressione esplicita per F^{-1} il metodo della trasformazione permette di simulare X calcolando $F^{-1}(Y)$ dove Y è uniforme in $[0, 1]$. Nei casi proposti:

- se $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$ allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$. Quindi $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - y)$, $y \in (0, 1)$.
- se $f(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ si ha $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\, x$. Invertendo: $F^{-1}(y) = \mathrm{tg}\,[\pi(y - \frac{1}{2})]$, $y \in (0, 1)$.

caputo@mat.uniroma3.it.