Università degli Studi di Roma TreCorso di laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2007/2008
Docente: Prof.ssa E.Scoppola - Tutrice: Dott.ssa Katia Colaneri

Tutorato n.4 del 26/03/2008-Soluzioni

Esercizio 1

Dobbiamo stimare due parametri quindi abbiamo bisogno di 2 equazioni: dovremo usare sia il momento primo che il momento secondo

$$\begin{cases} \mu_1 &= M_1 \\ \mu_2 &= M_2 \end{cases}$$

Dalla definizione:
$\mu_1 = \mathbb{E}(X)$; $M_1 = (\bar{X})$
$\mu_2 = \mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2$ e $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

$$\begin{cases} \frac{r}{\lambda} &= \bar{X} \\ \frac{r(r+1)}{\lambda} &= \sum_{i=1}^n X_1^2 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema e osservando che $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$ si ottiene:

$$\begin{cases} \widehat{r}_m &= \frac{\bar{X}^2}{\frac{n-1}{n}S^2} \\ \widehat{\lambda}_m &= \frac{\bar{X}}{\frac{n-1}{n}S^2} \end{cases}$$

Esercizio 2

Stimiamo i due parametri con il metodo dei momenti (osservando che in questo caso abbiamo 2 campioni casuali quindi è sufficiente usare solo il momento primo):

$$\begin{cases} a+b &= \bar{X} \\ a-b &= \bar{Y} \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} \widehat{a}_m &= \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2} \\ \widehat{b}_m &= \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{2} \end{cases}$$

Per l'altra stima scriviamo le funzioni di verosimiglianza per i due campioni:

$$L_1(x_1, ..., x_n, a+b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-(a+b))^2}{2\sigma^2}}$$

$$L_2(y_1, ..., y_n, a-b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-(a-b))^2}{2\sigma^2}}$$

Poniamo $\alpha = a+b$ e $\beta = a-b$:

Allora

$$L_1(x_1, ..., x_n, \alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L_2(y_1, ..., y_n, \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-beta)^2}{2\sigma^2}}$$

Dobbiamo massimizzare queste funzioni: passiamo al logaritmo

$$logL_1(x_1, ..., x_n, \alpha) = -n \log \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \alpha)^2}{2\sigma^2}$$

e deriviamo rispetto a α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} logL_1(x_1, ..., x_n, \alpha) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\alpha - 2\bar{X}\right)$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} logL_1(x_1, ..., x_n, \alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\alpha - 2\bar{X}\right) \Leftrightarrow \alpha = \bar{X}$$

Facciamo la stessa cosa per $L_2(y_1, ..., y_n, \beta)$: passiamo al logaritmo

$$logL_2(y_1, ..., y_n, \beta) = -n \log \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta)^2}{2\sigma^2}$$

e poi deriviamo

$$\frac{\partial}{\partial\beta} logL_2(y_1, ..., y_n, \beta) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\beta - 2\bar{Y}\right)$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\beta} logL_2(y_1, ..., y_n, \alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\beta - 2\bar{Y}\right) \Leftrightarrow \beta = \bar{Y}$$

Ci rimane da mettere a sistema le due relazioni trovate:

$$\begin{cases} \alpha &= \bar{X} \\ \beta &= \bar{Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b &= \bar{X} \\ a - b &= \bar{Y} \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} \widehat{a}_v &= \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2} \\ \widehat{b}_v &= \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 3

Stimiamo θ con il metodo dei momenti:

$$\mu_1 = M_1 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \int_0^\theta \frac{x}{\theta} dx = \frac{1}{\theta}\frac{x^2}{2}|_0^\theta = \frac{\theta}{2} = \bar{X}$$

Da cui $\widehat{\theta}_m = 2\bar{X}$. Calcoliamo la media di $\widehat{\theta}_m$

$$\mathbb{E}\widehat{\theta}_m = \mathbb{E}2\bar{X} = 2\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = 2\frac{1}{n}\frac{n\theta}{2} = \theta$$

Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$$

Vogliamo determinare il valore di θ che massimizza questa funzione, allora osserviamo che il prodotto $\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$ assume i valori 0;1 e dunque è massimo quando vale 1; allora chiamo:
$Y_1 = min\{x_1, ..., x_n\}$
$Y_n = max\{x_1, ..., y_n\}$.

$\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = 1 \Leftrightarrow Y_1 > 0$ e $Y_n < \theta \Leftrightarrow Y_1 \in (0, Y_n)$ e $\theta \in (Y_n, +\infty)$
Allora:

$$\max_\theta L(x_1, ..., x_n, \theta) = \max_\theta \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \max_\theta \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{(0,Y_n)}(Y_1)\mathbf{1}_{(Y_n,+\infty)}(\theta)$$

Dato che questa funzione è decrescente in θ il massimo si ottiene per $\theta = Y_n$
Da qui ricaviamo che $\widehat{\theta}_v = Y_n$
Per calcolare la media dobbiamo calcolare la distribuzione di Y_n:

$$P(Y_n \leq y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = [P(X_1 \leq y)]^n =$$

$$= \left(\int_0^y \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)dx\right)^n = \frac{y^n}{\theta^n}$$

$$f_{Y_n}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^n}{\theta^n}\right] = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(y)$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^\theta \frac{ny^n}{\theta^n}dy = \frac{n}{n+1}\theta$$

Esercizio 4

Calcoliamo la funzione di massima verosimiglianza:

$$L(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$$

Come prima vogliamo determinare il valore di θ che massimizza questa funzione, e osserviamo che il prodotto $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i)$ assume il massimo quando vale 1; allora chiamo:
$Y_1 = min\{x_1, ..., x_n\}$
$Y_n = max\{x_1, ..., y_n\}$.

$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = 1 \Leftrightarrow Y_1 > 0$ e $Y_n < \theta \Leftrightarrow Y_1 \in (0, Y_n)$ e $\theta \in (Y_n, +\infty)$
Allora:

$$\max_{\theta} L(x_1, ..., x_n, \theta) = \max_{\theta} \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \max_{\theta} \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n x_i \mathbf{1}_{(0,Y_n)}(Y_1) \mathbf{1}_{(Y_n,+\infty)}(\theta)$$

La funzione è decrescente in θ, dunque il massimo si ha per $\theta = Y_n$
Allora $\widehat{\theta}_v = Y_n$.

Calcoliamo la distribuzione di Y_n:

$$P(Y_n \leq y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = [P(X_1 \leq y)]^n =$$

$$= \left(\int_0^y \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) dx\right)^n = \frac{y^{2n}}{\theta^{2n}}$$

$$f_{Y_n}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^{2n}}{\theta^{2n}}\right] = \frac{2ny^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(y)$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^\theta \frac{2ny^{2n}}{\theta^{2n}} dy = \frac{2n}{2n+1}\theta$$

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \int_0^\theta \frac{2ny^{2n+1}}{\theta^{2n}} dy = \frac{n}{n+1}\theta^2$$

$$VarY_n = \frac{n}{n+1}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1}\theta\right)^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)}\theta^2$$

Esercizio 5

Scriviamo la funzione di verosimiglianza:

$$L(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta+1} \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i) = \left(\frac{1}{2\theta+1}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i)$$

Vogliamo determinare il valore di θ che massimizza questa funzione, allora osserviamo che il prodotto $\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i)$ assume i valori 0;1 e dunque è massimo quando vale 1; allora chiamo:
$Y_1 = min\{x_1, ..., x_n\}$
$Y_n = max\{x_1, ..., y_n\}$.

$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i) = 1 \Leftrightarrow Y_1 > 0$ e $Y_n < 2\theta + 1 \Leftrightarrow$

$Y_1 \in (0, Y_n)$ e $2\theta + 1 \in (Y_n, +\infty)$
Allora:

$$\max_\theta L(x_1, ..., x_n, \theta) = \max_\theta \left(\frac{1}{2\theta+1}\right)^n \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,2\theta+1)}(x_i) =$$

$$= \max_\theta \left(\frac{1}{2\theta+1}\right)^n \mathbf{1}_{(0,Y_n)}(Y_1)\mathbf{1}_{(Y_n,+\infty)}(2\theta+1)$$

Dato che questa funzione è decrescente in θ il massimo si ottiene per $2\theta+1 = Y_n$ Da qui ricaviamo che $\widehat{\theta}_v = \frac{Y_n-1}{2}$