Università degli Studi di Roma TreCorso di laurea in Matematica
Tutorato di ST1 - A.A. 2007/2008
Docente: Prof.ssa E.Scoppola - Tutrice: Dott.ssa Katia Colaneri

Tutorato n.3 del 14/03/2008 - Soluzioni

Esercizio 1

1. Ogni variabile X_i ha funzione di densità $f_X(x) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)$.
   Calcoliamola funzione di distribuzione di Y_1:

   $$P(Y_1 \leq y) = P(min\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = 1 - P(min\{X_1, ..., X-n\} \geq y) =$$

   $$= 1 - P(X_1 \geq y, ..., X_n \geq y) = 1 - [P(X_1 \geq y)]^n = 1 - \left(\int_y^{+\infty} \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)dx\right)^n =$$

   $$= \begin{cases} 1 - \left[\frac{1}{a^n}(\frac{a}{2} - \theta - y)\right]^n & se \quad y \in (\theta - \frac{a}{2}, \theta + \frac{a}{2}) \\ 1 & se \quad y \geq \theta + \frac{a}{2} \\ 0 & se \quad y \leq \theta - \frac{a}{2} \end{cases}$$

   $$f_{Y_1}(y) = \frac{d}{dy}P(Y_1 \leq y) = \frac{n}{a^n}(\frac{a}{2} + \theta - y)^{n-1}\mathbf{1}_{(\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2})}(y)$$

2. Per calcolare la distribuzione di Y_2 si procede in maniera analoga:

   $$P(Y_2 \leq y) = P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = [P(X_1 \leq y)]^n =$$

   $$= \left(\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2}]}(x)dx\right)^n = \begin{cases} \left[\frac{1}{a^n}(-\frac{a}{2} + \theta + y)\right]^n & se \quad y \in (\theta - \frac{a}{2}, \theta + \frac{a}{2}) \\ 1 & se \quad y \geq \theta + \frac{a}{2} \\ 0 & se \quad y \leq \theta - \frac{a}{2} \end{cases}$$

   $$f_{Y_2}(y) = \frac{d}{dy}P(Y_2 \leq y) = \frac{n}{a^n}\left(-\frac{a}{2} + \theta + y\right)^{n-1}\mathbf{1}_{(\theta-\frac{a}{2},\theta+\frac{a}{2})}(y)$$

Esercizio 2

Utilizzado la legge debole dei grandi numeri :
se $n > \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\delta}$, allora

$$P\left(\|\bar{X} - \mu\| < \epsilon\right) \geq 1 - \delta$$

Qiundi basterà risolvere:

$$n > \frac{1}{(0,5)^2 0.05}$$

da cui otteniamo $n > 80$

Esercizio 3

Calcoliamo le funzioni generatrici dei momenti di S e $\bar{X}$:

1.
$$m_S(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \prod_{i=1}^n e^{tX_i} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^x e^{\lambda}}{x!}\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^n e^{\lambda(e^t-1)}\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda e^{tx}e^{-\lambda e^t}}{x!}\right) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda n(e^t-1)}$$

2.
$$m_{\bar{X}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n X_i}\right) = m_S\left(\frac{t}{n}\right) = e^{\lambda n\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)}$$

Esercizio 4

Osserviamo che $f_X(x,\theta) = \frac{1}{\theta^4}xe^{-\frac{x}{\theta^2}}$ è la funzione di densità di una $\Gamma\left(2, \frac{1}{\theta^2}\right)$

$$m_{\bar{X}}(t) = m_{\sum_{i=1} nX_i}\left(\frac{t}{n}\right)$$

chiamo $\frac{t}{n} = s$:

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{sX_i}\right) = \prod_{i=1}^n\left[\int_0^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{\theta^4}xe^{-\frac{x}{\theta^2}}\right] = \prod_{i=1}^n\left[\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta^4}xe^{-x\left(\frac{1}{\theta^2}-s\right)}\right] =$$

integriamo per parti:

$$\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{\theta^4}\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta^2}-s\right)}\int_0^{+\infty}e^{-x\left(\frac{1}{\theta^2}-s\right)}\right) = \left[\frac{\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\theta^2}-s\right)^2}\right]^n = \left(\frac{\frac{n}{\theta^2}}{\frac{n}{\theta^2}-t}\right)^{2n}$$

Dunque $\bar{X}$ è una $\Gamma\left(2n, \frac{n}{\theta^2}\right)$.
Allora $\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{2n}{n}\theta^2 = 2\theta^2$

Esercizio 5

1.
$$Y = \sum_{i=1}^n (aX_i + b) \sim N(a\sum_{i=1}^n \mu_i + nb, a^2n)$$
Quindi dobbiamo imporre che $a^2n = 1$ e $a\sum_{i=1}^n(i-1) + nb = 0$ da cui ricaviamo $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b = \frac{1}{n} - \frac{1-n}{2\sqrt{n}}$

2. $\bar{Z}$ è distribuita come una $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

3. Calcolando la funzione generatrice dei momenti di Y^2 ricaviamo che $Y^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim \chi_1^2$. D'altra parte sappiamo che $(n-1)S^2$ è distribuita come una χ_{n-1}^2.Dunque:
$$\frac{Y^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$$

Esercizio 6

1. Dal calcolo della funzione generatrice dei momenti otteniamo:

$$m_{\bar{X}}(t) = \left(\frac{n\theta}{n\theta - t}\right)^n$$

Quindi $\bar{X} \sim \Gamma(n, n\theta)$

2. Procedendo come nell'esercizio 1:

$$P(max\{X_1, ..., X_n\} \leq z) = [P(X_1 \leq z)]^n = \left(1 - e^{-\theta z}\right)^n$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}P(Z \leq z) = n\theta e^{-\theta z}\left(1 - e^{-\theta z}\right)^{n-1}$$

3. $X_i \sim \Gamma(1, \frac{1}{2}) \sim \chi^2_2$ e analogamente $X_j \sim \Gamma(1, \frac{1}{2}) \sim \chi^2_2$
Da un risultato teorico possiamo concludere che $\frac{X_i}{X_j} \sim F(2, 2)$

Esercizio 7

1. Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti:

$$m_{\bar{X}}(t) = m_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{t}{n}}\right)^k\right]^n = \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - t}\right)^{nk}$$

Quindi $\bar{X} \sim \Gamma(nk, \frac{n}{2})$

2. $U \sim \chi^2_m$ e $X_1 \sim \chi^2_{2k}$ indipendenti.
Da un risultato teorico otteniamo che $Z = \frac{2k}{m}\frac{U}{X_1} \sim F(2k, m)$