ST1 - Scritto del 9-7-2008
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) La variabile casuale Z é normale con media $(a+b)\mu$ e varianza $\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{m}$. Dunque se $b=-a$ e $a=\sqrt{\frac{nm}{n+m}}$ abbiamo Z normale standard.

2) Z^2 ha distribuzione χ^2_1

3) $\frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}$ ha distribuzione $\mathcal{N}(\mu,\frac{1}{4}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}))$ mentre $\frac{\sum_{i=1}^n X_i+\sum_{i=1}^m Y_i}{n+m}$ ha distribuzione $\mathcal{N}(\mu,\frac{1}{n+m})$ e quest'ultima ha una varianza minore infatti $(n+m)^2>4mn$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo
$$\int x^5 \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)dx=\frac{\theta^6}{6}$$
dunque se $C=\frac{6}{\theta^6}$ abbiamo che la funzione $f(x,\theta)$ è una densità.

2)
$$E(X)=\frac{6}{7}\theta,\quad E(X^2)=\frac{3}{4}\theta^2,\quad var(X)=\theta^2\frac{3}{196}$$

3) Con il metodo dei momenti abbiamo $\bar{X}=\frac{6}{7}\hat{\Theta}_{mom}$ cioè
$$\hat{\Theta}_{mom}=\frac{7}{6}\bar{X}$$

4) $E(\hat{\Theta}_{mom})=\frac{7}{6}E(\bar{X})=\theta$ dunque è non distorto. Il suo errore quadratico medio è la sua varianza:
$$var(\hat{\Theta}_{mom})=\Big(\frac{7}{6}\Big)^2 var(\bar{X})=\Big(\frac{7}{6}\Big)^2\frac{1}{n}\theta^2\frac{3}{196}=\frac{1}{n}\theta^2\frac{1}{48}$$

5) La funzione verosimiglianza è:
$$L(\theta;x_1,...,x_n)=\big(\frac{6}{\theta^6}\Big)^n x_1^5...x_n^5\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x_1)...\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x_n)=$$

$$= \Big(\frac{6}{\theta^6}\Big)^n x_1^5 ... x_n^5 \mathbf{1}_{\{y_1 \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{y_n \leq \theta\}}$$

con $y_1 = \min\{x_1, ..., x_n\}$ e $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$, che è massima per θ minima e dunque

$$\hat{\Theta}_{ver} = Y_n$$

6) La distribuzione di Y_n la ricavo da:

$$P(Y_n \leq y) = \Big[C \int_0^y x^5 \, dx\Big]^n = \Big[\frac{y^6}{\theta^6}\Big]^n$$

per $y \in [0, \theta]$ mentre $P(Y_n \leq y) = 0$ per $y < 0$ e $P(Y_n \leq y) = 1$ per $y > \theta$. Dunque la sua densità è:

$$f_{Y_n}(y, \theta) = 6n \frac{y^{6n-1}}{\theta^{6n}} \mathbf{1}_{[0,\theta]}$$

Abbiamo:

$$E(Y_n) = \theta \frac{6n}{6n+1}, \quad E(Y_n^2) = \theta^2 \frac{6n}{6n+2}$$

Dunque $\hat{\Theta}_{ver}$ è distorto e la sua varianza è

$$var(Y_n) = \theta^2 \frac{6n}{(6n+2)(6n+1)^2}$$

L'errore quadratico medio risulta quindi:

$$MSE(Y_n) = var(Y_n) + \Big[\theta - E(Y_n)\Big]^2 =$$

$$= \theta^2 \frac{2}{(6n+2)(6n+1)}$$

Per grandi n abbiamo dunque $MSE(Y_n) \simeq \frac{2\theta^2}{(6n)^2} \ll MSE(\hat{\Theta}_{mom})$.

7) Dal teorema di fattorizzazione abbiamo che Y_n é una statistica sufficiente

8) Per dimostrare la completezza di Y_n calcoliamo

$$E(z(Y_n)) = \frac{6n}{\theta^{6n}} \int_0^\theta z(y) y^{6n-1} dy = 0 \qquad \forall \theta$$

e derivando rispetto a θ otteniamo

$$z(\theta)\theta^{6n-1} = 0$$

che implica $z(\theta) = 0$. Dunque Y_n é una statistica sufficiente e completa e dal lemma di Lehmann-Scheffé otteniamo che $Y_n \frac{6n+1}{6n}$ é UMVUE per θ.

Soluzione esercizio 3

1),2) La distribuzione di Bernoulli appartiene alla famiglia esponenziale e dunque $\sum_i X_i$ é una statistica sufficiente minimale e completa.

3) $\bar{X}$ é una statistica non distorta di p e dunque dal lemma di Lehmann-Scheffé é UMVUE di p.

4) Abbiamo H_0; $p = \frac{1}{2}$ contro $H_1 : \ p = \frac{2}{3}$. Dal lemma di Neyman-Pearson abbiamo che il test piú potente di ampiezza α corrisponde alla regione critica

$$C^* = \{x_1, ..., x_n : \sum_i x_i \geq K\}$$

con K tale che

$$\sum_{i=K}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \alpha$$