**ST1 - Scritto del 6-6-2008**
E. Scoppola

**Soluzione esercizio 1**

1) Possiamo applicare il teorema di fattorizzazione congiunta (Th.7.5 pg. 313) con

$$g(\bar{x}, y_1, \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n e^{n\frac{(\theta_1-\bar{x})}{\theta_2}} \mathbf{1}_{(\theta_1,\infty)}(y_1)$$

2)

$$E(\bar{X}) = EX = \theta_1 + \int_0^\infty \frac{1}{\theta_2} z e^{-\frac{z}{\theta_2}} dz = \theta_1 + \theta_2$$

$$f_{Y_1}(y) = -\frac{d}{dy}\Big(\int_y^\infty \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} dx\Big)^n = \frac{n}{\theta_2} e^{-\frac{y-\theta_1}{\theta_2}n} \mathbf{1}_{(\theta_1,\infty)}(y)$$

da cui $EY_1 = \theta_1 + \frac{\theta_2}{n}$
Usando il teorema Th.7.3 pg 313, per $n > 1$ abbiamo gli stimatori

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{n}{n-1}\Big(Y_1 - \frac{\bar{X}}{n}\Big), \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{n}{n-1}\Big(\bar{X} - Y_1\Big)$$

3) Chiamando $\theta = \frac{1}{\theta_2}$ si rientra nell'esempio 7.35 pg.333 e dunque $\bar{X}$ é UMVUE di $\theta_2$ e $\frac{n-1}{n}\frac{1}{\bar{X}}$ é UMVUE di $\frac{1}{\theta_2}$.

**Soluzione esercizio 2**

1)

$$\Big(\bar{X} - q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

e' l'intervallo di confidenza di livello $\gamma$ per $\mu$ con $q_2$ quantile $\frac{1+\gamma}{2}$ della normale standard, ed ha un'ampiezza $2q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, raddoppiando $\sigma$ si raddoppia l'ampiezza.

2)

$$\Big(\frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{q_2}, \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{q_1}\Big)$$

e' l'intervallo di confidenza di livello $\gamma$ per $\sigma$ con $q_1$ e $q_2$ quantili $\frac{1-\gamma}{2}$ e $\frac{1+\gamma}{2}$ rispettivamente della distribuzione $\chi^2(n)$ ed ha un'ampiezza

$$\sum_i (x_i - \mu)^2 (\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}) = \Big( \sum_i x_i^2 + \mu^2 - 2\mu n \bar{x} \Big) (\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2})$$

che é minima per $\mu = n\bar{x}$.

**Soluzione esercizio 3**

1) Per il lemma di Neyman-Pearson il test piu' potente di ampiezza $\alpha$ e' (Vd. es. 9.7 pg. 414):

   si rifiuta $H_0$ se $\sum_i x_i \leq K'$ con $K'$ quantile $\alpha$ di $\Gamma(n,1)$

2) Per $n = 1$ il test diventa:

   si rifiuta $H_0$ se $x_1 \leq K'$ con $K'$ tale che $1 - e^{-K'} = \alpha$ da cui otteniamo $K' \simeq 0.05$ dunque $H_0$ viene accettato.