ST1 - Scritto del 11-4-2008
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) La media campionaria $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ è normale con media μ e varianza $\frac{\sigma^2}{n}$ dunque per essere normale standard deve essere $\mu = 0$ e $\sigma^2 = n$.

2) La varianza campionaria $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ é tale che $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{n-1}{n}S^2$ ha distribuzione χ^2_{n-1}.

3) Abbiamo che $\bar{X}^2$ ha distribuzione χ^2_1, $\bar{X}$ e S^2 sono indipendenti e $\frac{n\bar{X}^2}{S^2} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{U}{n-1}}$. Dunque $\frac{n\bar{X}^2}{S^2}$ ha distribuzione $F(1, n-1)$

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo
$$\int_\theta^\infty e^{-x}dx = e^{-\theta}$$
dunque se $C = e^\theta$ abbiamo che la funzione $f(x,\theta)$ è una densità.

2)
$$E(X) = e^\theta \int_\theta^\infty xe^{-x}dx = e^\theta \Big[-xe^{-x}\Big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty e^{-x}dx \Big] = \theta + 1$$
$$E(X^2) = e^\theta \int_\theta^\infty x^2e^{-x}dx = e^\theta \Big[-x^2e^{-x}\Big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty 2xe^{-x}dx \Big] = \theta^2 + 2\theta + 2$$
$$var(X) = \theta^2 + 2\theta + 2 - (\theta+1)^2 = 1$$

3) Con il metodo dei momenti abbiamo $\bar{X} = \hat{\Theta}_{mom} + 1$ cioè
$$\hat{\Theta}_{mom} = \bar{X} - 1$$

4) $E(\hat{\Theta}_{mom}) = E(\bar{X}) - 1 = \theta$ dunque è non distorto. Il suo errore quadratico medio è la sua varianza:
$$var(\hat{\Theta}_{mom}) = var(\bar{X}) = \frac{1}{n}$$

5) La funzione verosimiglianza è:

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = e^{n\theta} e^{-\sum_i x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x_i) = e^{n\theta} e^{-\sum_i x_i} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(y_1)$$

con $y_1 = \min\{x_1, ..., x_n\}$ che è massima per θ massimo e dunque

$$\hat{\Theta}_{ver} = Y_1$$

6) La distribuzione di Y_1 la ricavo da:

$$P(Y_1 \leq y) = 1 - P(Y_1 > y) = 1 - \left[e^{\theta} \int_y^{\infty} e^{-x} dx\right]^n = 1 - e^{-(y-\theta)n}$$

per $y \geq \theta$. Dunque la sua densità è:

$$f_{Y_1}(y, \theta) = ne^{-(y-\theta)n} \mathbf{1}_{[\theta,\infty]}(y)$$

Abbiamo:

$$E(Y_1) = e^{\theta n} n \int_{\theta}^{\infty} ye^{-yn} dy = \theta + \frac{1}{n}$$

$$E(Y_1^2) = e^{\theta n} n \int_{\theta}^{\infty} y^2 e^{-yn} dy = \theta^2 + \frac{2}{n}(\theta + \frac{1}{n})$$

Dunque $\hat{\Theta}_{ver}$ è distorto e la sua varianza è

$$var(Y_1) = \theta^2 + \frac{2}{n}(\theta + \frac{1}{n}) - \left[\theta + \frac{1}{n}\right]^2 = \frac{1}{n^2}$$

L'errore quadratico medio risulta quindi:

$$MSE(Y_1) = var(Y_1) + \left[\theta - E(Y_1)\right]^2 = \frac{2}{n^2}$$