ST1 - Scritto del 6-6-2006

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Abbiamo
$$E(X_i) = \theta, \quad E(X_i^2) = 2\theta^2, \quad var(X_i) = \theta^2$$
Le statistiche $\hat{\theta}_i$ hanno
$$E\hat{\theta}_1 = E\hat{\theta}_2 = E\hat{\theta}_3 = E\hat{\theta}_4 = \theta$$
dunque sono stimatori non distorti di θ. Per stimatori non distorti abbiamo $MSE(\hat{\theta}_i) = var(\hat{\theta}_i)$ con
$$var(\hat{\theta}_1) = \theta^2, \quad var(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta^2}{2}, \quad var(\hat{\theta}_3) = \frac{5}{9}\theta^2, \quad var(\hat{\theta}_4) = \frac{\theta^2}{n}$$

2) Usando il teorema di fattorizzazione $\bar{X}$ è una statistica sufficiente poichè la densità congiunta
$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x_i) = g(s;\theta)h(x_1,...,x_n)$$
con $s = s(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$. Poichè la densità del campione è un membro della famiglia esponenziale a un parametro possiamo anche concludere che $\sum_{i=1}^n X_i$ è anche minimale completa.

Usando il teorema di Lehmann-Scheffè possiamo dunque concludere che θ_4 è un UMVUE di θ.

3) Consideriamo come candidato estimatore di $var(X_i) = \theta^2$ la statistica $\bar{X}^2$ Abbiamo $E(\bar{X}^2) = var(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 = \theta^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)$ dunque $\bar{X}^2$ è uno stimatore distorto di θ^2. Consideriamo allora $\frac{n}{n+1}\bar{X}^2$ come stimatore di θ^2, questo è non distorto e sempre per il teorema di Lehmann-Scheffè è UMVUE di θ^2.

Soluzione esercizio 2

1) La variabile aleatoria
$$Q = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$$
ha distribuzione normale standard e dunque è una quantità pivotale. Abbiamo che l'evento $\{q_1 \leq Q \leq q_2\}$ è equivalente all'evento $\{\bar{X} - q_2 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - q_1 \frac{5}{\sqrt{n}}\}$. Usando la simmetria della distribuzione normale standard possiamo scegliere $q_1 = -q_2$ con q_2 uguale al quantile 0.95 della distribuzione normale standard. Dunque l'intervallo di confidenza richiesto è:
$$(\bar{X} - q_2 \frac{5}{\sqrt{n}}, \bar{X} + q_2 \frac{5}{\sqrt{n}})$$

2) Dalle tavole abbiamo $q_2 \sim 1.645$. La condizione sull'ampiezza dell'intervallo di confidenza è dunque
$$2 \frac{5}{\sqrt{n}} 1.645 < 1$$
da cui otteniamo $n > (16.45)^2$ cioè $n > 271$

Soluzione esercizio 3

1) Applichiamo il Lemma di Neyman-Pearson. La densità del campione è $f(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ con $x = 0, 1, 2, ...$ e quindi il rapporto delle verosimiglianze è:
$$\frac{L_0}{L_1} = e^{-(\lambda_0 - \lambda_1)n} \Big(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\Big)^{\sum_i x_i}$$
Poichè $\lambda_1 > \lambda_0$ abbiamo che $\frac{L_0}{L_1} \leq K^*$ è equivalente a $\sum_i x_i \geq K'$. La costante K' deve essere tale che
$$P_{\lambda_0}(\sum_i X_i \geq K') = \alpha$$
e poichè la variabile casuale $\sum_i X_i$ ha distribuzione Poissoniana di parametro $n\lambda_0$ abbiamo che K' è il quantile $1 - \alpha$ di questa distribuzione. Dunque il test più potente ha regione critica
$$C_{Y^*} = \{(x_1, ..., x_n) : \quad \sum_i x_i \geq K'\}$$

2) Si, poichè la regione critica non dipende dal valore λ_1.

3) Per $\lambda_0 > \lambda_1$ abbiamo $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) > 1$ e dunque la regione critica diventa
$$C_{Y^*} = \{(x_1, ..., x_n) : \quad \sum_i x_i \leq K''\}$$
con K'' quantile α della distribuzione Poissoniana di parametro $n\lambda_0$.