1.1 Risposte commentate

1.1.1 Il quoziente è 5, il resto è 22, e il significato dell'operazione compiuta è espresso dalla relazione: $237 = 43 \cdot 5 + 22$ essendo evidente che $22 < 43$.

1.1.2 Questo esercizio, pur nella sua semplicità, è istruttivo. Cominciamo considerando la terna di numeri 1, 2, 3; i resti della divisione per 3 sono rispettivamente 1, 2, 0; proseguendo, troviamo terne di numeri con gli stessi resti 1, 2, 0 che si ripetono periodicamente. Dunque un solo numero per ogni terna (il terzo!) ha come resto 0, cioè è divisibile per 3. Si trovano, in conclusione, questi risultati:

- Numero dei multipli di 3: 200;
- Numero dei multipli di 4: 150;
- Numero dei multipli di 12: 50.

Per i multipli di 17 si procede in modo analogo, ma poiché 600 non è multiplo di 17, si deve fare la divisione con resto di 600 per 17: il quoziente è 35 (e il resto è 5).

Il numero degli interi divisibili per 3 o per 4 è uguale alla somma del numero degli interi divisibili per 3 con quelli divisibili per 4, diminuita del numero di quelli che sono divisibili per 3 e per 4, cioè per 12. Nel nostro caso si ha dunque: $(200 + 150) - 50 = 300$.

1.1.3 L'ordinamento richiesto è, evidentemente, il seguente: -3; -1; 0; 0,003; 0,19; $2/5$; 0,91 che può essere opportunamente visualizzato mediante la "retta dei numeri".

1.1.4 Le due frazioni $3/7$ e $4/5$, ridotte allo stesso denominatore,diventano rispettivamente:

$$\frac{15}{35}\,, \quad \frac{28}{35}\,.$$

È evidente che la prima è minore delle seconda; è anche facile trovare una frazione intermedia (ad esempio, $20/35$). Anche la media aritmetica, cioè la frazione $43/70$ è compresa fra le due frazioni assegnate. Un'altra idea per trovare una frazione intermedia consiste nel sommare numeratori e denominatori: si verifica subito che la frazione $\frac{3+4}{7+5} = \frac{7}{12}$ è intermedia fra le due frazioni assegnate.

1.1.5 Una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ si può esprimere come numero decimale finito (cioè come frazione che ha per denominatore una potenza di 10) quando e soltanto quando il suo denominatore contiene solo fattori 2 e 5. In caso diverso la "divisione con la virgola" non può concludersi. Le successive cifre vengono determinate, una volta esaurite le cifre del dividendo, aggiungendo la cifra 0 ai resti; ma i resti diversi, se il divisore è b, possono essere al più in numero di $b-1$ (infatti, il resto non può essere uguale a 0). Dunque vi sarà un resto che si ripete, dopodiché le cifre si ripeteranno periodicamente. Il periodo allora non può superare $b-1$. È facile trovare esempi in cui il periodo è $b-1$. Consideriamo, ad esempio, la frazione $3/7$; il risultato del calcolo è $0{,}42857342873\ldots$ con periodo 6. Esempio di tipo opposto: $5/6 = 0{,}8333...$, con periodo 1.

1.1.6 Il numero assegnato si presenta già scomposto in fattori primi. Fra questi fattori non compare il 17, che è un numero primo. Allora il numero assegnato non è divisibile per 17. L'esercizio ci ricorda che la decomposizione di un numero in fattori primi è unica (a meno dell'ordine dei fattori).

1.1.7 Se x è lo stipendio iniziale di un dipendente, dopo l'abbassamento questo diventa $x - x \cdot 0{,}08 = x \cdot (1 - 0{,}08)$, dopo il rialzo diventa $x \cdot (1 - 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}08) = x \cdot (1 - 0{,}0064)$; pertanto lo stipendio, alla fine, rimane ad un livello leggermente più basso di quello iniziale.

1.1.8 Ogni divisore comune dei due numeri deve essere anche un divisore della loro differenza; nel caso specifico, deve essere un divisore di $10002 - 9999 = 3$; è immediato verificare che 3 è effettivamente un divisore comune dei due numeri; perciò esso è il M.C.D.

Su questo principio è basato l'algoritmo di Euclide per la ricerca del M.C.D.

1.1.9 Si ha $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$; il numero è dunque prodotto di 3 interi consecutivi; esso è certamente divisibile per 2 e per 3, dunque per 6.

1.1.10 Si deve avere ben presente che per due numeri reali positivi x, y e per un qualsiasi intero positivo m si ha

$$x^m < y^m \quad \text{se e soltanto se} \quad x < y\,.$$

Nel nostro caso, prendendo $m = 6$, si ha che la disuguaglianza $5^{1/3} < 3^{1/2}$ equivale alla $(5^{1/3})^6 < (3^{1/2})^6$, cioè alla $5^2 < 3^3$; ma questa è vera, essendo $25 < 27$. Dunque è vero che il maggiore dei due numeri proposti è $3^{1/2}$.

1.1.11 Teniamo presente che se è $b > 1$ e se x e y sono numeri reali positivi, la disuguaglianza

$$x \leq y \quad \text{è equivalente alla} \quad \log_b x \leq \log_b y\,.$$

Prendiamo $x = 10^m$, con m intero naturale, $y = 3748279$. Allora

$$m \leq \log_{10} 3748279 \quad \text{se e solo se} \quad 10^m \leq 3748279\,.$$

Il maggiore intero m per cui vale quest'ultima disuguaglianza è 6. Il ragionamento che abbiamo fatto ha, in realtà, portata generale ed è cosa ben nota: la parte intera del logaritmo decimale di un intero positivo N è uguale al numero delle cifre decimali di N diminuito di 1. Dunque, la parte intera di $\log_{10} 3748279$ è uguale a 6.

1.1.12 Ogni divisore comune di due interi è anche divisore della loro differenza; pertanto, ogni divisore comune di n e di $n+2$ è un divisore di 2; allora, i casi sono due: n ed $n+2$ sono entrambi pari, cioè entrambi divisibili per 2, oppure entrambi dispari, e allora sono primi fra loro.

1.1.13 Il ragionamento svolto nel testo per provare che $\sqrt{2}$ è irrazionale si applica alla lettera per dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale, osservando che se p è un intero naturale tale che p^2 è divisibile per 3, allora anche p è divisibile per 3.

1.1.14 La relazione $\log_2 5 = p/q$, con p e q interi naturali equivale alla $2^{p/q} = 5$, cioè alla $2^p = 5^q$, ma questa relazione è assurda per l'unicità della decomposizione in fattori primi.

* * *

1.2.1 Si ha: $1+2+3=6$; $7+8+9=24$; .... In generale, la somma di tre interi consecutivi, cioè il numero $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ è divisibile per 3.

La somma di quattro interi consecutivi si può scrivere: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$ e certamente non è divisibile per 4. Passiamo a cinque interi consecutivi: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$ e otteniamo evidentemente un numero divisibile per 5. L'enunciato ci stimola ad ottenere una risposta generale, riguardante la somma di k interi consecutivi; si ha:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+k-1)=nk+(1+2+3+\ldots+k-1)=nk+\frac{1}{2}k(k-1)\,.$$

Si vede allora che per k dispari, essendo $k-1$ pari, l'espressione scritta è divisibile per k, mentre per k pari, essendo $k-1$ dispari, l'espressione è divisibile per $\frac{1}{2}k$, ma non per k.

1.2.2 Si ha: $n^2-4n+3=(n-1)\cdot(n-3)$; questo prodotto è divisibile per 7 (che è numero primo) quando e solo quando uno dei fattori lo è. I numeri cercati sono dunque quelli per cui $n-1=7\cdot k$, cioè $n=1+7\cdot k(k=0,1,2,3,\ldots)$, oppure $n-3=7\cdot h$, cioè $n=3+7\cdot h(h=0,1,2,\ldots)$. Notiamo che questi due insiemi di numeri sono disgiunti.

1.2.3 Si intuisce che il risultato sarà più grande quando nel prodotto vengono accoppiati il maggiore con il maggiore e il minore con il minore. Dimostriamo dunque che

$$ab+a'b'>ab'+a'b\;;$$

questa relazione equivale alle seguenti:

$$a(b-b')+a'(b'-b)>0\;;\quad a(b-b')-a'(b-b')>0\;;\quad (a-a')(b-b')>0\,.$$

Quest'ultima è evidentemente vera. Per il caso generale, indichiamo la soluzione soltanto in termini intuitivi. Se due elementi di A, a,a' con $a<a'$ vengono moltiplicati per due numeri di B, b,b' tali che $b>b'$, possiamo scambiare b con b' aumentando la somma complessiva, come abbiamo dimostrato. Così, per mezzo di successivi scambi, possiamo fare im modo che gli elementi di A vengano moltiplicati per quelli di B che corrispondono ad essi nell'ordinamento, e ciò sempre accrescendo il valore della somma complessiva. Al contrario, si potrà ottenere, con successivi scambi che fanno diminuire la somma complessiva, che gli elementi di B si seguano in ordine inverso rispetto a quelli di A che sono con essi associati con la moltiplicazione.

1.2.4 Supponiamo, per assurdo, che la prima delle frazioni sia riducibile; allora c'è un intero $k > 1$ tale che $a = ka''$, $b = kb''$; ma allora si ha: $a'b - ab' = k(a'b'' - a''b') \neq \pm 1$. Analogamente si procede per la seconda.

Dimostriamo che se a/b e a'/b' sono fra loro associate, anche a/b e $(a+a')/(b+b')$ lo sono; basta fare un piccolo calcolo:

$$(a+a')b - a(b+b') = a'b - ab' = \pm 1 \ .$$

La teoria delle frazioni associate è molto elegante; ad esempio, si può dimostrare che partendo dalle due frazioni $0/1$, $1/1$ e applicando più volte quella strana operazione (che è una ingannevole addizione)

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) \to \frac{a+a'}{b+b'}$$

si può ottenere una *qualsiasi* frazione irriducibile con valore compreso fra 0 ed 1.

1.2.5 Sappiamo che dalle due disuguaglianze (nello stesso senso!) $a \leq b$, $c \leq d$ si deduce: $a + c \leq b + d$; pertanto, nel nostro caso, si ha:

$$2{,}3 + (-1{,}6) \leq x + y$$

cioè $0,7 \leq x + y$; procedendo in modo analogo per l'estremo destro, si ottiene:

$$0{,}7 \leq x + y \leq 1{,}1 \ .$$

Per avere i limiti di variabilità di $x - y$, basta tenere presente che $x - y = x + (-y)$. Occorre allora trovare i limiti di variabilità di $-y$; poiché passando agli opposti i sensi delle disuguaglianze si invertono, si ha

$$(*) \qquad 1{,}4 \leq -y \leq 1{,}6$$

perciò procedendo come nel primo caso si ottiene:

$$3{,}7 \leq x - y \leq 4{,}1 \ .$$

Per le altre due limitazioni, la via più sbrigativa è quella di ridursi a disuguaglianze tra numeri non negativi; prendiamo dunque la seconda limitazione nella forma $(*)$. Da questa e dalla prima limitazione si ha:

$$2{,}3 \cdot 1{,}4 \leq x \cdot (-y) \leq 2{,}5 \cdot 1{,}6$$

cioè:

$$2{,}3 \cdot 1{,}4 \leq -xy \leq 2{,}5 \cdot 1{,}6$$

e, infine:

$$-2{,}5 \cdot 1{,}6 \leq xy \leq -2{,}3 \cdot 1{,}4\ .$$

Per ottenere la quarta limitazione, ricordiamo che se a e b sono numeri positivi, la disuguaglianza $a \leq b$ equivale alla $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. Ritorniamo dunque ancora alla $(*)$; passando ai reciproci si ha: $\frac{1}{1{,}6} \leq \frac{1}{-y} \leq \frac{1}{1{,}4}$. Facendo ora intervenire la limitazione per la x, si ottiene:

$$\frac{2{,}3}{1{,}6} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{2{,}5}{1{,}4}$$

cioè, infine:

$$-\frac{2{,}5}{1{,}4} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{2{,}3}{1{,}6}\ .$$