2.1.1 $A = \frac{7}{4}$.

Nota. Il calcolo poteva essere effettuato mediante sostituzione diretta nell'espressione data, oppure osservando preliminarmente che l'espressione può essere semplificata in quanto $p^3 - q^3$ è divisibile per $p - q$. Nel caso specifico, i due procedimenti sono ugualmente semplici. In genere è più vantaggioso effettuare le sostituzioni solo dopo avere eseguito le semplificazioni (specie se i valori numerici da sostituire sono complicati).

2.1.2 $-(a+b+c)$.

2.1.3 Tenuto conto della legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione data si ottengono semplicemente risolvendo le tre equazioni di primo grado:

$$2x+1=0 \qquad 3x-2=0 \qquad x+4=0$$

quindi le soluzioni sono: $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, -4.

Nota. Chi, invece di ricorrere alla legge di annullamento del prodotto, avesse svolto i calcoli per "togliere le parentesi", avrebbe trasformato l'equazione originaria in un'altra (equivalente alla data, ma di forma diversa) di cui poi sarebbe stato difficile determinare le radici.

2.1.4 $N = L - \frac{19}{100}L = \frac{81}{100}L$.

2.1.5 Il sistema ammette un'unica soluzione: $(x;y) = (0{,}2\,;\,-0{,}5)$.

2.1.6 Si tratta dell'unione di due intervalli:

$$\{x < -\sqrt{3}\} \quad \text{oppure} \quad \{x \geq -\sqrt{2}\}.$$

Nota. Sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza debole (ossia $\leq$) nel caso del primo intervallo e sarebbe sbagliato usare il segno di disuguaglianza forte (ossia $>$) nel caso del secondo intervallo.

Ancor più sbagliato sarebbe usare scritture del tipo

$$-\sqrt{2} \leq x < -\sqrt{3}$$

oppure

$$\begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x \geq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Cercate di capire perché tutte queste scritture non sono accettabili!

2.1.7
$$p = \frac{1}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q}} = \frac{qr}{q-r}.$$

Nota. L'espressione trovata ha senso solo se $q \neq r$. D'altra parte, questa condizione era implicita già nella formulazione del quesito, poiché se fosse $q = r$ ne seguirebbe $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ e quindi, sostituendo nella relazione iniziale, $\frac{1}{p} = 0$, relazione non soddisfatta da alcun valore di p.

2.1.8 Si ottiene un'espressione in t che, effettuate le debite semplificazioni, si riduce alla costante 1.

Nota. Il risultato ottenuto ammette un'interpretazione geometrica in termini di funzioni trigonometriche: posto $t = \operatorname{tang}\theta/2$ (con θ angolo opportuno) risulta $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$. Quindi si tratta delle equazioni parametriche della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

2.1.9 Per non dover fare troppi calcoli conviene riscrivere l'espressione data nella forma $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)$ da cui, raccogliendo il fattore comune $(y^2 - x^2)$ e semplificando, si ottiene $x^2 - y^2$.

2.1.10 Detti p, q i due numeri, si tratta di risolvere il sistema:
$$\begin{cases} p + q = 6 \\ p \cdot q = 8. \end{cases}$$
La soluzione è data dai due numeri 2 e 4.

2.1.11 Ragionando come per il quesito precedente e risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} p - q = 3 \\ p \cdot q = -2 \end{cases}$$
si trovano due soluzioni: la coppia di numeri 1 e -2 e la coppia di numeri 2 e -1.

Nota. I quesiti 2.1.10 e 2.1.11 sono simili. Tuttavia il primo ammette una sola soluzione, mentre il secondo ne ammette due. Per chi avesse la curiosità di capire il perché di questa apparente anomalia, ecco una possibile spiegazione. In entrambi i casi si tratta di risolvere un sistema di secondo grado. Ripercorriamo per sommi capi le tappe del procedimento risolutivo: nella prima equazione si esplicita una delle due variabili in funzione dell'altra, per esempio q in funzione di p, e si sostituisce l'espressione così trovata nella seconda equazione; con ciò si perviene ad un'equazione di secondo grado nella sola p, che dunque ha due soluzioni p_1, p_2 (le quali risultano reali e distinte in entrambi i quesiti). Sostituendo p_1 nella prima equazione si trova un certo valore q_1 con la proprietà che (p_1, q_1) è una soluzione del sistema. Analogamente, sostituendo p_2 nella prima equazione, si trova un certo valore q_2 con la proprietà che (p_2,q_2) è una soluzione del sistema.

Orbene, nel caso del sistema del quesito 2.1.10 le due coppie così trovate: $(p_1,q_1)=(2,4)$, $(p_2,q_2)=(4,2)$ coincidono (a meno dell'ordine) e quindi si usa dire che c'è una sola soluzione. Nel caso del sistema del quesito 2.1.11 invece, le due coppie: $(p_1,q_1)=(1,-2)$, $(p_2,q_2)=(2,-1)$ sono distinte. La ragione di fondo del diverso comportamento dei due sistemi deriva dal fatto che nel caso 2.1.10 i ruoli di p e q sono simmetrici e dunque interscambiabili (l'addizione e la moltiplicazione godono della proprietà commutativa) mentre nel caso 2.1.11 i due ruoli di p e q sono distinti (in quanto la sottrazione non gode della proprietà commutativa).

Si noti infine che, proprio grazie alla simmetria del sistema 2.1.10, esiste un metodo più rapido per trovarne la soluzione: basta ricordare che p e q sono le radici dell'equazione $x^2-(p+q)x+p\cdot q=0$.

2.1.12 Traduzione. Se a , b sono numeri reali positivi, da $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ segue: $a+b=ab$.

L'enunciato è vero: basta svolgere i calcoli.

Nota. L'ipotesi che i due numeri a,b siano positivi non viene sfruttata nei calcoli, quindi l'enunciato è vero più in generale, anche senza questa limitazione (vanno solo esclusi i valori $a=0$, $b=0$). Si noti però che, dei tre casi a priori possibili: numeri entrambi positivi, un numero positivo e l'altro negativo, numeri entrambi negativi, quest'ultimo non si può presentare. Infatti da $a<0$, $b<0$ segue che anche i rispettivi reciproci sono entrambi negativi; pertanto la somma di tali reciproci è ancora un numero negativo, e dunque non può essere 1.

* * *

2.2.1 Sono vere la prima, la terza e la quarta uguaglianza (conseguenza delle proprietà formali delle operazioni). Sono false la seconda e la quinta uguaglianza (basta dare un esempio, attribuendo opportuni valori numerici ad a,b,c,d , per es. $a=b=c=d=1$).

Nota. È importante riflettere sulla struttura delle domande in cui si articola questo quesito e sulla struttura delle rispettive risposte. Le domande contengono dei "quantificatori universali" espressi dalle parole "qualunque siano i numeri..." (una formulazione equivalente poteva essere: "per tutti i numeri..."). In situazioni di questo tipo, ossia quando si tratta di stabilire se un'affermazione "universale" è vera o falsa, per provarne la verità occorre dare una dimostrazione che contempli la totalità dei casi possibili, mentre per provarne la falsità basta esibire un esempio. Infatti un'affermazione si considera "falsa", quando la negazione dell'affermazione è "vera"; inoltre, la negazione di un'affermazione "universale": "Per ogni ... vale ..." è un'affermazione "esistenziale": "Esiste almeno un ... per il quale ... non vale".

2.2.2 Per la legge di annullamento del prodotto (vedi sopra, soluzione dell'esercizio 2.1.3) l'equazione cercata è:

$$(x+1)(x-4)\left(x-\frac{11}{3}\right)=0.$$

Nota. Anche ogni altra equazione ottenuta moltiplicando entrambi i membri della precedente per un numero diverso da 0 soddisfa alle condizioni richieste, per es. $(x+1)(x-4)(3x-11)=0$.

2.2.3 $x>-\sqrt[3]{2}$.

2.2.4 Riducendo allo stesso denominatore e uguagliando i coefficienti al numeratore, ci si riconduce al sistema:

$$\begin{cases} c+d=0 \\ bc+ad=1 \end{cases}$$

che, risolto nelle incognite c,d dà:

$$c=\frac{1}{b-a} \qquad\qquad d=\frac{1}{a-b}\ .$$

2.2.5 Svolgendo i calcoli:

$$(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

Nota. In generale, partendo da altre espressioni di quarto grado in più variabili, non è detto che queste siano trasformabili in prodotti di due fattori di secondo grado.

2.2.6 L'espressione $3x^2-2xy+2y^2$ può essere scritta in un'infinità di modi come somma di quadrati. Per es.:

$$(x^2-2xy+y^2)+2x^2+y^2=(x-y)^2+(\sqrt{2}x)^2+y^2.$$

Nota. È altresì possibile trasformare la stessa espressione in somma di due soli quadrati. Basta ricorrere al classico procedimento noto come "completamento del quadrato". Si spezza l'espressione data in due componenti:

$$3x^2-2xy+2y^2=(3x^2-2xy+ky^2)+(2-k)y^2$$

e si determina k in modo che il polinomio $3x^2-2xy+ky^2$ risulti un quadrato perfetto. Ciò accade per $k=1/3$:

$$3x^2-2xy+\frac{1}{3}y^2=(\sqrt{3}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y)^2.$$

Per $k=1/3$ anche l'altra componente può essere scritta sotto forma di quadrato perfetto:

$$(2-\frac{1}{3})y^2=\frac{5}{3}y^2=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,y\right)^2$$

da cui la tesi.

L'espressione $3x^2 - 6xy + 2y^2$ non può essere scritta come somma di quadrati. Per provarlo, basta osservare che attribuendo opportuni valori alle variabili x, y l'espressione assume valori negativi, mentre una somma di quadrati deve essere sempre ≥ 0. Per es. si prenda $x = y = 1$.

2.2.7 Il quoziente della divisione del polinomio $A = x^4$ per il polinomio $B = x^2 + 1$ è $Q = x^2 - 1$ e il resto è $R = 1$. Questo fatto si esprime mediante l'uguaglianza $A = B \cdot Q + R$ che nel caso specifico diventa: $x^4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1$.

2.2.8 Da $0 < a \leq b$ segue $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b} > 0$.

2.2.9 Sia h la misura del lato più corto. Allora (vedi Figura 1):

$$k : h = h : \frac{k}{2}.$$

Quindi $h = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$.

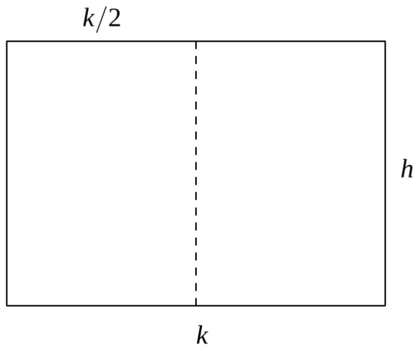

Figura 1.

2.2.10 L'equazione $\sqrt{x^2} = x$ ammette come soluzione ogni valore di x tale che $x \geq 0$.

Nota. I valori di x per cui $x < 0$ invece non risolvono l'equazione. Infatti in tal caso si ha identicamente: $\sqrt{x^2} = -x$.

L'equazione $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$ ammette l'unica soluzione $x = 1$.

Nota. Il procedimento risolutivo basato sull'elevamento al quadrato di ambedue i membri dà luogo ad un'equazione di secondo grado $x^2 + 3 = 4x^2$ che ammette due soluzioni: $+1$ e -1. Ma la soluzione negativa va esclusa, in quanto non verifica l'equazione di partenza.

2.2.11 La disequazione $\frac{1}{x}+x>2$ è verificata per ogni x maggiore di 0 e diverso da 1.

L'insieme delle soluzioni può essere scritto anche nella forma

$$(0,1)\cup(1,\infty).$$

La disequazione $\frac{1}{\sqrt{x+5}}+2\geq 0$ è verificata per ogni $x>-5$.

Possiamo anche scrivere che x è soluzione se e solo se

$$x\in(-5,\infty).$$

2.2.12 È sbagliato il passaggio da (6) a (7). Infatti l'uguaglianza tra i quadrati di due numeri non implica l'uguaglianza tra i numeri stessi. Quindi da (6) si può dedurre solo che

$$a-c=b-c \qquad \text{oppure} \qquad a-c=-b+c$$