0.1 SINTESI

Oggetto di studio è la costruzione dello spazio dei moduli per classi di isomorfismo di curve stabili (vedi par. 4.1, def.4.4).
In sintesi, abbiamo una famiglia (vedi par.1.1, par.4.1) di curve che hanno in comune il genere e la serie lineare g_d^N che le immerge in uno spazio proiettivo. Identifichiamo il supporto dello schema che costituisce il loro spazio dei parametri. Esiste, quindi, una corrispondenza uno a uno fra le curve della famiglia e i punti dello schema. Se adesso introduco una relazione di equivalenza fra le curve, cioè, $X \sim Y$ se e solo se sono curve proiettivamente equivalenti, quindi faccio agire sull'insieme delle curve il gruppo delle proiettività, allora queste si ripartiscono in classi di equivalenza. Ci chiediamo allora che cosa ne sarà dello spazio dei parametri in seguito all'azione del gruppo su di esso. È ancora possibile individuare una struttura di schema o di varietà sul quoziente che rispecchi la struttura continua della famiglia di curve ? Se no, quali restrizioni devo introdurre affinché questo avvenga ?
Se, per esempio, la relazione di equivalenza introdotta fosse quella banale, cioè l'identità, allora la semplice costruzione dello spazio dei parametri darebbe luogo a una risposta positiva al problema.
Queste domande esprimono, in modo sintetico e approssimativo, quali sono i termini fondamentali di un problema di costruzione dello spazio dei moduli di certe varietà.
L'analisi è articolata in quattro capitoli.
Nel primo capitolo diamo una descrizione del problema , (a volte detto - problema dei moduli o problema di classificazione), in termini di categorie e funtori, senza alcuna caratterizzazione degli oggetti geometrici da classificare.
La distinzione fondamentale presente in esso è quella fra il buon spazio dei moduli, (vedi, def.1.1, def. 1.2), e lo spazio dei moduli grezzo(vedi, def.1.3,

def.1.4). Il primo, lo spazio che classifica gli oggetti, rappresenta l'obiettivo massimo a cui si può aspirare, ma è difficilmente raggiungibile. Il secondo, che sarebbe uno spazio che non parametrizza oggetti, bensì orbite di oggetti, è, invece, più facilmente costruibile. Alla distinzione fra le due definizioni siamo arrivati attraverso l'uso di un funtore contravariante dalla categoria delle varietà alla categoria degli insiemi, il funtore F. Presa una varietà S, F(S) è l'insieme delle famiglie di oggetti di un dato insieme A, parametrizzate da S.
Considerata M, una varietà il cui insieme sostegno è $A/\sim$, abbiamo definito la seguente applicazione

$$\Phi(S) : F(S) \to Hom(S, M)$$

che porta famiglie parametrizzate da S in morfismi da S a M. Questa applicazione determina una trasformazione naturale

$$\Phi : F \to Hom(-, M),$$

la cui eventuale natura di isomorfismo funtoriale è sinonimo di rappresentabilità del funtore F. È proprio sulla base di questo concetto di rappresentabilità del funtore che abbiamo introdotto una distinzione fra i due tipi di spazi. Il buon spazio dei moduli è proprio la coppia (M, Φ) che rappresenta F. Diversamente, uno spazio dei moduli grezzo è la coppia (M, Φ), dove Φ è soltanto una trasformazione naturale.
La rappresentabilità di F ha una bella conseguenza:
Se $\varphi : D \to S$ è una qualsiasi famiglia in F(S) allora esiste un unico morfismo

$$\chi = \Phi(S)(\varphi),$$

$$\chi : S \to M.$$

Intuitivamente, χ prende un punto $s \in S$, la cui fibra tramite φ è un oggetto della famiglia D, e lo porta in un punto di M, lo spazio dei moduli. Portando indietro tramite Φ l'applicazione identità di M in se stessa, si costruisce una famiglia $Id : C \to M$ in F(M), chiamata la famiglia universale. La ragione di questo nome risiede nel fatto che, dato un qualsiasi morfismo $\chi : S \to M$ definito come sopra, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} D & \to & C \\ \varphi \downarrow & & \downarrow Id \\ S & \to & M \end{array}$$

dove, $\varphi : D \to S$ è in F(S) e $\Phi(S)(\varphi) = \chi$. Quindi, ogni famiglia su S è il pullback di C, tramite un unico morfismo che va da S a M.

Dunque, in altre parole, l'esistenza di una famiglia universale C rende M, lo spazio che la parametrizza, un buon spazio dei moduli.
Sempre nel primo capitolo viene introdotta una tipologia di famiglia con proprietà più deboli, ma con un ruolo centrale nella costruzione di uno spazio dei moduli grezzo, la famiglia completa. Quest'ultima ha una proprietà importante, che mette in luce un legame esistente fra la costruzione di uno spazio dei moduli grezzo e la costruzione di un particolare quoziente tramite l'azione di un gruppo G sul suo spazio dei parametri: il morfismo che le corrisponde tramite l'applicazione $\Phi(S)$, dove S è la variet à che la parametrizza, è un morfismo G-invariante su S. In questo modo, entriamo negli argomenti trattati nel secondo capitolo.
In quest'ultimo esaminiamo un tentativo di soluzione al problema dei moduli, che fa uso della teoria geometrica degli invarianti. L'idea sarebbe quella di fare agire un gruppo algebrico G su una varietà X e, successivamente, di mettere sul quoziente una struttura di varietà, caratterizzata dal fatto che a ogni suo punto corrisponda una classe di equivalenza nel quoziente, cioè, una corrispondenza uno a uno fra punti e orbite.
Quanto detto, traduce in termini approssimativi una definizione centrale nel capitolo, quella di quoziente categorico che è anche un orbit space, (vedi, def.2.2). L'esistenza di un quoziente categorico di una varietà X, tramite l'azione di un gruppo G, assicura l'esistenza di una varietà Y e di un morfismo G-invariante $\phi : X \to Y$; il fatto che sia anche un orbit space assicura che ϕ sia proprio la proiezione canonica e che, quindi, Y sia lo spazio delle orbite.
La proposizione 2.1 mostra la centralità del ruolo svolto da questi quozienti nella costruzione di uno spazio grezzo: sia $X \to S$ una famiglia completa parametrizzata da S, relativa a un certo problema di moduli; allora, costruendo su S, tramite l'azione di un gruppo, un quoziente categorico che sia anche un orbit space, si ottiene uno spazio dei moduli grezzo.
Dunque, il problema è quello di capire come sia possibile costruire quozienti siffatti. A questo scopo, abbiamo introdotto due importanti restrizioni. La prima consiste nel prendere in considerazione soltanto una sottoclasse di gruppi : i gruppi riduttivi, (vedi, def 2.3). Grazie al teorema di Nagata,(vedi, Teo. 2.1) i gruppi riduttivi hanno la proprietà di costruire quozienti affini su varietà affini, (vedi, Teo.2.2). Questo fatto ha una ricaduta importante anche sulla costruzione di quozienti non affini su una varietà qualsiasi. Infatti, il metodo generale di costruzione di quozienti consiste nell'idea di ricoprire la varietà X con un numero finito di aperti U_i, affini, G-invarianti, e, quindi, di costruire un quoziente categorico X/G incollando i quozienti U_i/G. L'esistenza di questi ultimi è garantita dal fatto che il gruppo agente è riduttivo.
La seconda restrizione è relativa alla classe delle azioni. Affinché il quoziente categorico sia un orbit space dobbiamo avere che l'azione sia chiusa (vedi,

cor.2.3). Sia nel caso affine, che nel caso generale, la chiusura dell'azione non potrà mai verificarsi su tutta la varietà. Dunque, diventa fondamentale l'individuazione di sottoinsiemi della varietà ricopribili con un numero finito di aperti affini G-invarianti, sui quali l'azione risulti chiusa. Questa ricerca si struttura intorno al concetto di stabilità e di semistabilità di un punto, (def.2.9). Infatti, soltanto sui sottoinsiemi dei punti semistabili e stabili della varietà è possibile costruire quozienti con le proprietà richieste,(vedi, prop.2.3).
La parte finale di questo capitolo è dedicata alla formulazione di criteri numerici per la stabilità. L'idea è quella di considerare soltanto l'azione esercitata da particolari sottogruppi di G, i sottogruppi a un parametro λ, (vedi, def. 2.10). Il risultato più importante e più utile sull'argomento è quello proposto dal Mumford, (vedi, Teo.2.3): sfruttando la natura riduttiva del gruppo, egli dimostra che la stabilità rispetto all'azione di G è equivalente alla stabilità rispetto all'azione dei suoi sottogruppi a un parametro.
Nel terzo capitolo, iniziamo con la costruzione, secondo Grothendieck, del supporto dello schema di Hilbert per curve proiettive con lo stesso polinomio di Hilbert, $P(x) = dx - g + 1$. Ci limitiamo all'individuazione dei punti del supporto, in quanto lo scopo principale del capitolo è quello di formulare una definizione di stabilità per i punti di Hilbert, con la conseguente introduzione di criteri numerici che consentano di individuare su questo spazio dei parametri il sottinsieme giusto.
La costruzione del supporto ruota intorno al concetto di m-regolarità di Mumford ,(vedi, def.3.1, prop.3.2, prop.3.3), il quale assicura l'esistenza di un intero positivo m, dipendente solo dal polinomio di Hilbert, tale che $\forall r \geq m$, r intero, si ha la seguente successione di coomologia esatta

$$0 \to H^0(P^n, F(r)) \to H^0(P^n, O(r)) \to H^0(X, L^r) \to 0,$$

e si ha, anche, che l'ideale omogeneo della curva X, nelle parti di grado r, risulta generato linearmente dal suo pezzo I_m di grado m.
Il fatto che m dipenda solo dal polinomio di Hilbert, assicura che, fissato un $r \geq m$, al variare delle curve X della famiglia si abbia sempre l'esattezza della successione di coomologia corrispondente. Inoltre, il fatto che I_m generi le parti di grado maggiore dell'ideale omogeneo, assicura che esso determini completamente la curva. Questi due elementi sono di cruciale importanza per l'identificazione del supporto dello schema di Hilbert.
La definizione di stabilità del punto di Hilbert è legata al tipo di spazio proiettivo in cui esso viene immerso, e al tipo di immersione che viene eseguita, (vedi, par.3.1). Infatti, il criterio numerico, introdotto nel paragrafo 3.2, mette in luce il ruolo centrale svolto dalla coordinata di Plücker del punto nella valutazione della stabilità di questo.

Nel quarto capitolo, infine, lavoriamo sempre con la famiglia di curve proiettive del capitolo precedente, soltanto che, a differenza di questo, introduciamo delle limitazioni su g e su d, cioè, $g \geq 2$ e $d \geq 20(g-1)$, e, inoltre, prendiamo in considerazione solo curve connesse.
L'idea portante del capitolo è quella di individuare quale sia la sottoclasse di curve della famiglia suddetta a cui ci si deve restringere, affinché il quoziente sui punti di Hilbert corrispondenti abbia la struttura di uno spazio dei moduli grezzo. A questo scopo usiamo tutti i risultati teorici visti in precedenza.
Come prima tappa dimostriamo che a una curva liscia e non degenere nella famiglia corrisponde un punto di Hilbert stabile, (vedi, Teo.4.5). Dopodiché, stando sullo schema di Hilbert, ci allarghiamo dall'aperto dei punti stabili a quello dei punti semistabili. Quindi, mostriamo come a un punto di Hilbert semistabile corrisponda una curva semistabile secondo i moduli, (vedi, Teo.4.6).
A questo punto la ricerca di un sottoinsieme, che consenta la costruzione di un quoziente con proprietà buone, avviene all'interno dell'aperto V dei punti semistabili. È, infatti, possibile individuare un sottoinsieme U, localmente chiuso in V, che ha la proprietà di parametrizzare soltanto curve stabili, (vedi, par.4.4), e immerse in modo pluricanonico. Per il teo. 2.3 è possibile costruire su U, tramite G, un buon quoziente proiettivo. Il problema è, dunque, quello di mostrare che tale quoziente è uno spazio dei moduli grezzo. Il teorema conclusivo del capitolo si occupa proprio di questo. Utilizzando alcune proprietà delle curve stabili, (vedi, Teo.4.1, Teo.4.2, Lem.4.2), è possibile dimostrare che ogni curva stabile della famiglia è rappresentata nel sottoinsieme U. Inoltre, il Teo. 4.2 assicura che lo stabilizzatore di G è finito, in quanto finito è il gruppo degli automorfismi di una curva stabile, e il Lemma 4.2 garantisce la chiusura delle orbite. Pertanto, è possibile affermare che $\frac{U}{G}$ è uno spazio dei moduli grezzo per classi di isomorfismo di curve stabili.