



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Giovanni Perrone

Sulla stabilità dei metodi semi-Lagrangiani di ordine alto

Relatore
Prof. Roberto Ferretti

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006
OTTOBRE 2006

Classificazione AMS: 65M25, 65M12.

Parole Chiave: Equazioni iperboliche, schemi semi-Lagrangiani, schemi di ordine alto, stabilità.

Giovanni Perrone è nato a Lecce il 17 Dicembre 1972
ha conseguito il Diploma Tecnico Commerciale ind. Programmatori nell'anno 1991
ha lavorato come programmatore presso il Ministero delle Finanze dal 1993 al 2000
dal 2001 lavora presso l'Agenzia delle Entrate
si è immatricolato al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma Tre
nell'A.A. 1997-1998

TESINE ORALI PRESENTATE

1. Il moto Browniano (Probabilità)
2. Il metodo di Gauss Seidel (Analisi Numerica)

Indice

Introduzione	3
1 Schemi semi-Lagrangiani e problema modello	4
1.1 Definizione del problema	4
1.2 Operatori di interpolazione	5
1.2.1 Elementi finiti \mathbb{P}_1	5
1.2.2 Elementi finiti \mathbb{P}_2	6
1.2.3 Interpolazione simmetrica localmente cubica	6
1.3 Convergenza degli schemi semi-Lagrangiani	6
2 Stabilità	8
2.1 Stabilità in l^∞	8
2.2 Stabilità in l^2	8
2.3 Autovalori dello schema semi-Lagrangiano	9
3 Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani ad elementi finiti \mathbb{P}_1	12
3.1 Costruzione dello schema e curva degli autovalori	12
3.2 Proprietà degli autovalori e stabilità dello schema	13
4 Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani ad elementi finiti \mathbb{P}_2	15
4.1 Costruzione dello schema e curva degli autovalori	15
4.2 Proprietà degli autovalori	17
4.3 Quasi-normalità e pseudospettro della matrice di iterazione .	18
4.4 Ricostruzioni con elementi finiti \mathbb{P}_r	22
4.5 Discretizzazioni spaziali non uniformi	23
4.5.1 Elementi finiti \mathbb{P}_1	23
4.5.2 Elementi finiti \mathbb{P}_r	24
4.6 Criticità delle ricostruzioni non regolari	25

5	Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani con interpolazione cubica simmetrica	27
5.1	Costruzione dello schema	27
5.2	Curva descritta dagli autovalori	28
5.3	Proprietà degli autovalori	31
	Bibliografia	32

Introduzione

Gli schemi semi-Lagrangiani sono una famiglia di metodi sviluppati per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico del primo ordine.

L'idea fondamentale alla base dei metodi semi-Lagrangiani è quella di approssimare la soluzione sopra una griglia, integrando numericamente l'equazione differenziale lungo le caratteristiche uscenti da ogni nodo della griglia, ricostruendo poi la soluzione ai piedi delle caratteristiche.

Tali metodi hanno il vantaggio di non essere vincolati a condizioni di tipo CFL e di consentire l'utilizzo di passi di discretizzazione temporale relativamente ampi senza che la stabilità numerica dei metodi risulti compromessa. Di contro, i vari tentativi effettuati fino ad oggi per dimostrare in modo rigoroso la loro stabilità e convergenza, hanno prodotto risultati soltanto parziali, per lo più riconducibili all'analisi di stabilità di Von Neumann, aventi quindi lo svantaggio di potersi applicare solo ad equazioni a coefficienti costanti, con soluzioni fortemente regolari e di richiedere l'uso di griglie di discretizzazione uniformi.

L'obiettivo del nostro lavoro è quindi quello di esplorare la praticabilità di un approccio alla stabilità degli schemi alternativo rispetto all'analisi classica di Von Neumann. Tale approccio verrà effettuato sotto l'ipotesi che lo schema numerico sia lineare e si baserà essenzialmente sullo studio della relazione che intercorre tra due soluzioni successive dello schema e sulle proprietà degli autovalori di dette soluzioni.

Capitolo 1

Schemi semi-Lagrangiani e problema modello

1.1 Definizione del problema

Studieremo la stabilità dei metodi Semi-Lagrangiani focalizzando la nostra attenzione sul problema modello:

$$\begin{cases} v_t + av_x = 0 & \text{in } [0, 1] \times \mathbb{R} \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{in } [0, 1] \\ v(0, t) = v(1, t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

con condizioni periodiche al bordo in $x = 0$, $x = 1$ e campo di trasporto costante $-a \in \mathbb{R}$.

La soluzione $v(x, t)$ del problema modello (1.1) è data da $v(x, t) = v_0(y(x, t))$, dove $y(x, t)$ è l'equazione della caratteristica uscente da x al tempo t . Si ha che, al tempo t_n , il piede della caratteristica uscente da x_j al tempo t_{n+1} è $\bar{y}(x_j) = x_j - a\Delta t$. Di conseguenza, lo schema semi-Lagrangiano totalmente discreto per il nostro problema modello (1.1) è il seguente

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = I[V^n](x_j - a\Delta t) & j \in \mathcal{Q} \\ v_j^0 = v_0(x_j) \end{cases} \quad (1.2)$$

in cui $V^n = (v_1^n, \dots, v_q^n)^T$ è la soluzione al tempo t_n , q è il numero di nodi in spazio, \mathcal{Q} è l'insieme di tali nodi, $I[V](x)$ è un interpolante numerica dei va-

lori v_j calcolata nel punto x , ed assumeremo che se il piede della caratteristica $x_j - a\Delta t \notin [0, 1]$ è riportato all'interno dell'intervallo $[0, 1]$ per 1-periodicità.

1.2 Operatori di interpolazione

Nel nostro lavoro assumeremo che $I[V](x)$ sia una interpolazione di tipo Lagrangiano (quindi lineare rispetto a V), che condurrà dunque ad uno schema della forma

$$\begin{cases} V^{n+1} = \Psi V^n \\ V^0 = (v_0(x_1), \dots, v_0(x_q))^T \end{cases}$$

con $\Psi = (\psi_{jk})$ matrice costante che dipenderà dal metodo adottato. Si possono seguire principalmente due strade, che conducono a differenti strutture per la matrice Ψ . Nel primo caso le funzioni di base per l'interpolazione sono fissate, cioè si ha

$$I[V](x) = \sum_{k \in \mathcal{Q}} v_k \psi_k(x).$$

Tipicamente in tal caso le funzioni di base ψ_k sono del tipo elementi finiti. Nel secondo caso le funzioni di base non sono fissate a priori ma dipendono da x ; per esempio una ricostruzione cubica di questo tipo viene solitamente ottenuta prendendo due nodi a destra e due a sinistra di x , così che, se $x_l \leq x \leq x_{l+1}$, si ha

$$I[V](x) = \sum_{k=l-1}^{l+2} v_k L_{kl}(x)$$

con

$$L_{kl}(x) = \prod_{\substack{m=l-1 \\ m \neq k}}^{l+2} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}.$$

1.2.1 Elementi finiti \mathbb{P}_1

L'operatore di interpolazione ad elementi finiti \mathbb{P}_1 sul generico intervallo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ è

$$I[V](x) = -\frac{x-x_{j+1}}{\Delta x_j} v_j + \frac{x-x_j}{\Delta x_j} v_{j+1} \quad (1.3)$$

dove $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ è l'ampiezza dell'intervallo I_j .

1.2.2 Elementi finiti \mathbb{P}_2

L'operatore di interpolazione ad elementi finiti \mathbb{P}_2 sul generico intervallo $I_l = [x_{2l-1}, x_{2l+1}]$ è dato da

$$I[V](x) = \frac{(x - x_{2l})(x - x_{2l+1})}{2\Delta x_l^2} v_{2l-1} - \frac{(x - x_{2l-1})(x - x_{2l+1})}{\Delta x_l^2} v_{2l} + \frac{(x - x_{2l-1})(x - x_{2l})}{2\Delta x_l^2} v_{2l+1} \quad (1.4)$$

dove $\Delta x_l = \frac{1}{2}(x_{2l+1} - x_{2l-1})$ è la semiampiezza dell'intervallo I_l .

1.2.3 Interpolazione simmetrica localmente cubica

L'operatore di interpolazione localmente cubico, costruito sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ simmetricamente rispetto all'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, è dato da

$$I^{i+\frac{1}{2}}[V](x) = -\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{6\Delta x^3} v_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{2\Delta x^3} v_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{2\Delta x^3} v_{i+1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{6\Delta x^3} v_{i+2} \quad (1.5)$$

dove Δx è l'ampiezza (costante) di ogni intervallo $[x_j, x_{j+1}]$.

1.3 Convergenza degli schemi semi-Lagrangiani

Se \mathcal{B} è uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$, uno schema semi-Lagrangiano (lineare) può essere visto come una famiglia di operatori lineari

$$S_{\Delta t} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{t.c.} \quad V^{n+1} = S_{\Delta t} V^n.$$

Definizione 1.1. $\{S_{\Delta t}\}$ ha *ordine di consistenza* p se

$$\|v(t+\Delta t) - S_{\Delta t}v(t)\| = O(\Delta t^{p+1}) \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.6)$$

dove $v(t)$ è una soluzione sufficientemente regolare del problema ai dati iniziali. Si dice che lo schema $\{S_{\Delta t}\}$ è *consistente* se ha ordine di consistenza $p > 0$.

Definizione 1.2. $\{S_{\Delta t}\}$ è *convergente* se

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n\Delta t = t}} \|S_{\Delta t}^n v(0) - v(t)\| = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.7)$$

dove $v(t)$ è la soluzione del problema ai valori iniziali (1.1) per ogni possibile dato iniziale v_0 .

Definizione 1.3. $\{S_{\Delta t}\}$ è *stabile* se per ogni tempo $T > 0$

$$\exists C_T > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|S_{\Delta t}^n\| \leq C_T \quad \forall n, \Delta t : 0 \leq n\Delta t \leq T. \quad (1.8)$$

Abbiamo quindi il seguente risultato fondamentale (vedi [RM]):

Teorema 1.1 (di Equivalenza di Lax). *Sia $\{S_{\Delta t}\}$ uno schema numerico consistente per un problema ai valori iniziali del tipo (1.1) ben posto. Allora $\{S_{\Delta t}\}$ è convergente se e solo se è stabile.*

Da tale teorema si comprende l'importanza dello studio della stabilità di uno schema numerico. Infatti, in generale, è piuttosto semplice dimostrare la consistenza di un metodo confrontando le serie di Taylor della soluzione continua e di quella discreta, mentre è molto più complesso dimostrarne la convergenza. Tale teorema consente quindi di dimostrare la convergenza di uno schema consistente passando attraverso la dimostrazione della sua stabilità.

Capitolo 2

Stabilità

Analizzeremo la stabilità dello schema totalmente discreto considerando ricostruzioni $I[V]$ lineari rispetto a V . Daremo un risultato di stabilità in l^∞ e vedremo alcuni risultati di stabilità per gli schemi semi-Lagrangiani in l^2 .

2.1 Stabilità in l^∞

La stabilità incondizionata in l^∞ rispetto al passo in tempo Δt (ma non rispetto al passo in spazio Δx) può essere provata dal seguente

Teorema 2.1. *Supponiamo Δx fissato e sia $I[V](x)$ l'operatore di interpolazione polinomiale della forma $I[V](x) = \sum_{j=1}^q v_j \psi_j(x)$, con $\{\psi_j(x)\}_{j=1,\dots,q}$ base di funzioni limitate tali che $\psi_j(x_k) = \delta_{jk}$. Allora lo schema totalmente discreto (1.2) è stabile per ogni $\Delta t > 0$.*

2.2 Stabilità in l^2

Il modo classico per provare la stabilità in l^2 è l'analisi di Von Neumann (o analisi di Fourier). Tale metodo può essere applicato solo in caso di equazioni a coefficienti costanti in \mathbb{R} con condizioni periodiche e nodi uniformemente distribuiti.

Indicati con γ_k i coefficienti di amplificazione di uno schema numerico, si può dimostrare il seguente risultato per gli schemi espliciti di tipo differenze finite (vedi [QSS]), che in realtà può essere esteso anche agli schemi semi-Lagrangiani in cui l'operatore di interpolazione è lineare.

Teorema 2.2. *Sia, per un'opportuna scelta di Δt e Δx , $|\gamma_k| \leq 1 \forall k$. Allora lo schema numerico esplicito alle differenze finite è stabile rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\Delta, 2}$.*

Dall'applicazione della condizione di stabilità di Von Neumann $|\gamma| \leq 1$ allo schema discreto (1.2) del nostro problema modello si trova che deve essere soddisfatta la relazione

$$|\gamma| = \left[\left(\sum_m \psi_{jm} \cos(\omega m \Delta x) \right)^2 + \left(\sum_m \psi_{jm} \sin(\omega m \Delta x) \right)^2 \right]^{1/2} \leq 1. \quad (2.1)$$

Dall'analisi numerica di tale condizione si trova (vedi fig. 2.1) che gli schemi semi-Lagrangiani ad elementi finiti \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 possono essere stabili in l^2 , mentre per gli ordini più alti la stabilità non sarebbe garantita per ogni passo in tempo e spazio. Nel caso di schemi costruiti con interpolazioni simmetriche invece la stabilità in l^2 prevista numericamente è stata recentemente dimostrata (vedi [BM]).

2.3 Autovalori dello schema semi-Lagrangiano

Il nostro approccio per affrontare il problema della stabilità degli schemi in l^2 è quello di studiare le proprietà degli autovalori della matrice di iterazione. Se la matrice di iterazione Ψ è diagonalizzabile, introdotta la matrice di trasformazione T che diagonalizza Ψ , avremo

$$\Psi = T^{-1} \Lambda T \quad (2.2)$$

con Λ matrice diagonale contenente gli autovalori di Ψ .

Al problema di partenza possiamo allora associare un nuovo problema nella base degli autovettori:

$$V^{n+1} = \Psi V^n \quad \Leftrightarrow \quad V^{n+1} - T^{-1} \Lambda T V^n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

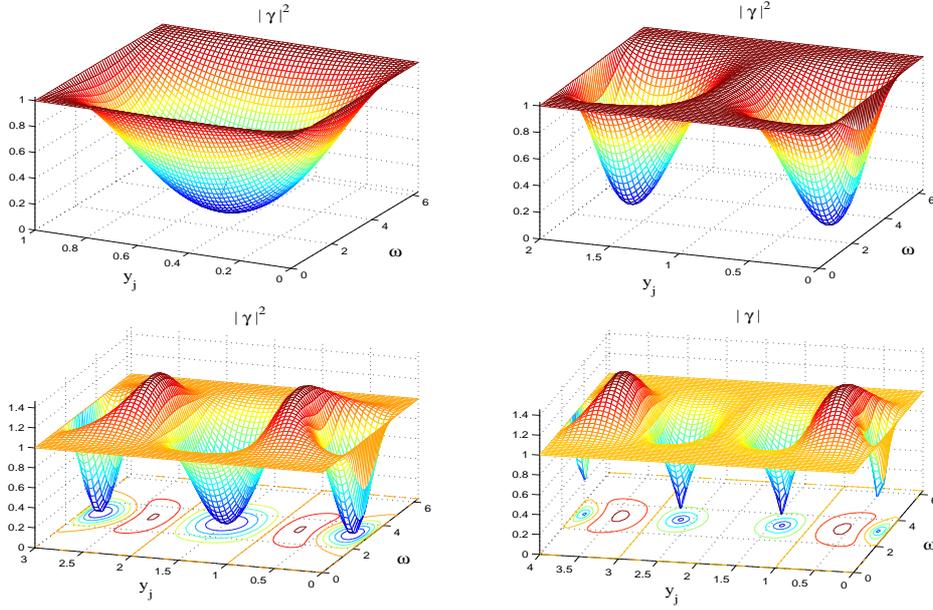


Figura 2.1: Fattori di amplificazione per interpolazioni di ordine 1, 2, 3, 4.

$$\Leftrightarrow TV^{n+1} - \Lambda TV^n = 0 \quad \Leftrightarrow U^{n+1} = \Lambda U^n$$

dove $U^n = TV^n$ rappresenta la soluzione del problema iniziale espressa nella base degli autovettori di Ψ . A questo punto, se gli autovalori sono tutti di modulo minore di uno, avremo $\|\Lambda\| \leq 1$ e quindi la stima cercata $\|\Lambda^n\| \leq \|\Lambda\|^n \leq 1$.

Sorge però un problema. Nella trasformazione per similitudine (2.2) infatti anche la matrice T dipende dai passi in tempo e spazio: $T = T(\Delta t, \Delta x)$. Di conseguenza anche la soluzione nella nuova base $U^n = TV^n$ presenta la stessa dipendenza.

Affinché tutto funzioni correttamente quindi occorre che il numero di condizionamento della matrice di trasformazione T sia uniformemente limitato

al variare di Δt e Δx . Infatti

$$\begin{aligned}
\|\Psi^n\| &= \|(T^{-1}\Lambda T)^n\| \\
&= \underbrace{\|T^{-1}\Lambda T T^{-1}\Lambda T \cdots T^{-1}\Lambda T\|}_{n \text{ volte}} \\
&= \|T^{-1}\Lambda^n T\| \\
&\leq \|T^{-1}\| \|\Lambda^n\| \|T\| \\
&= \|\Lambda^n\| k(T)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dove con $k(T) = \|T\| \|T^{-1}\|$ abbiamo indicato il numero di condizionamento della matrice di trasformazione.

Osservazione 2.1. Se la matrice di iterazione Ψ è normale e siamo nello spazio l^2 tutto funziona ‘bene’. Sappiamo infatti che ogni matrice normale è diagonalizzabile attraverso una trasformazione unitaria. Quindi vale (2.2) con T unitaria, cioè tale che $T^{-1} = T^*$, dove T^* indica la trasposta coniugata di T . È noto poi che per le matrici unitarie in l^2 vale $\|T\|_2 = \|T^{-1}\|_2 = 1$, da cui segue $k_2(T) = 1$. Pertanto, in tal caso, la condizione che gli autovalori siano contenuti nel disco unitario è sufficiente per poter maggiorare le potenze della matrice Ψ in (2.3).

Osservazione 2.2. Anche nel caso particolare in cui la matrice di iterazione Ψ sia circolante la condizione sugli autovalori è sufficiente per assicurare la stabilità dello schema. Infatti, basta ricordare che ogni matrice circolante è normale C di dimensione n è definita come

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

quindi è ottenuta prendendo in ogni riga gli elementi della riga precedente shiftati di una posizione ($c_{jk} = c_{k-j \bmod n}$). Si può facilmente verificare poi che tutte le matrici circolanti commutano tra loro (vedi [M]), cioè se C_1 e C_2 sono due matrici circolanti di dimensione n , allora $C_1 C_2 = C_2 C_1$. Infine si ha che, ovviamente, la trasposta coniugata di una matrice circolante è ancora circolante. Segue facilmente quindi la proprietà che, se Ψ è una matrice circolante, allora $\Psi \Psi^* = \Psi^* \Psi$, cioè è anche normale.

Capitolo 3

Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani ad elementi finiti \mathbb{P}_1

3.1 Costruzione dello schema e curva degli autovalori

Introdotta il *numero di Courant* $\alpha = -a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ e supponendo che sia $\alpha \in [0, 1]$, si ottiene lo schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1

$$v_j^{n+1} = (1 - \alpha)v_j^n + \alpha v_{j+1}^n \quad (3.1)$$

e, di conseguenza, la matrice di iterazione

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

che è circolante e quindi normale. Sfruttando la relazione che sussiste sulla soluzione ai due estremi di un intervallo

$$v_{j+1}^n = \left[\frac{\lambda - (1 - \alpha)}{\alpha} \right] v_j^n$$

si ottiene, iterando, l'equazione degli autovalori dello schema:

$$\left[\frac{\lambda - (1 - \alpha)}{\alpha} \right]^q = 1 \quad (3.3)$$

Quindi gli autovalori del nostro schema sono situati sul piano complesso su un cerchio \mathcal{C}_α di centro $(1 - \alpha)$ e raggio α (vedi fig. 3.1). La loro equazione esplicita è

$$\begin{cases} x(\alpha) = \Re(\lambda) = \alpha \cos\left(\frac{2m\pi}{q}\right) + (1 - \alpha) \\ y(\alpha) = \Im(\lambda) = \alpha \sin\left(\frac{2m\pi}{q}\right) \end{cases} \quad m = 0 \dots q-1 \quad (3.4)$$

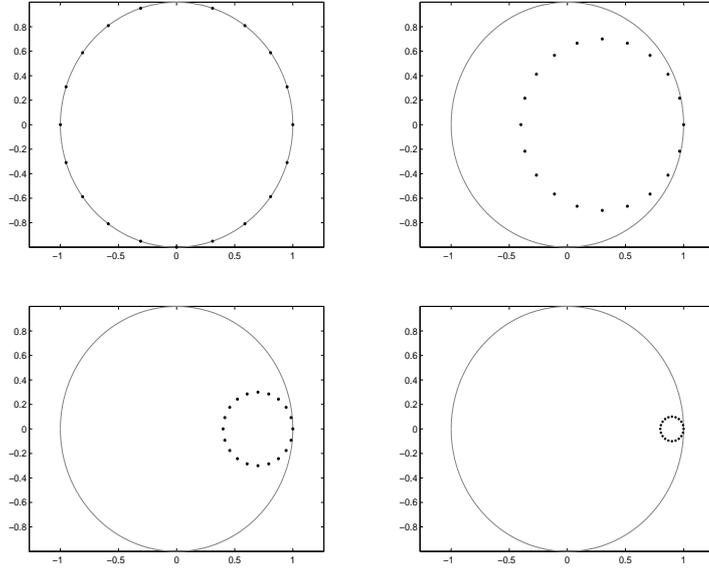


Figura 3.1: Il cerchio in linea continua rappresenta il disco unitario, mentre i punti costituiscono gli autovalori dello schema \mathbb{P}_1 con numero di Courant (da sinistra in alto) $\alpha = 1, 0.7, 0.3, 0.1$.

3.2 Proprietà degli autovalori e stabilità dello schema

Dai risultati del paragrafo precedente si può concludere che, nel caso $\alpha \in [0, 1]$, la matrice Ψ_α è normale con autovalori di modulo non superiore ad 1,

pertanto lo schema è stabile.

Se si estende l'analisi al caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$ si ottiene che la struttura della matrice è sempre a banda come nel caso $\alpha \in [0, 1]$, con coefficienti traslati per righe. Ciò equivale ad aver moltiplicato la matrice Ψ_α del caso standard per una matrice circolante unitaria. Tale operazione corrisponde ad effettuare una rotazione degli autovalori di Ψ_α , senza che gli stessi escano dal disco unitario e quindi senza compromettere la stabilità dello schema. Se si calcola la matrice Ψ_α in tale ipotesi si ottiene che la curva degli autovalori è quella rappresentata in figura 3.2.

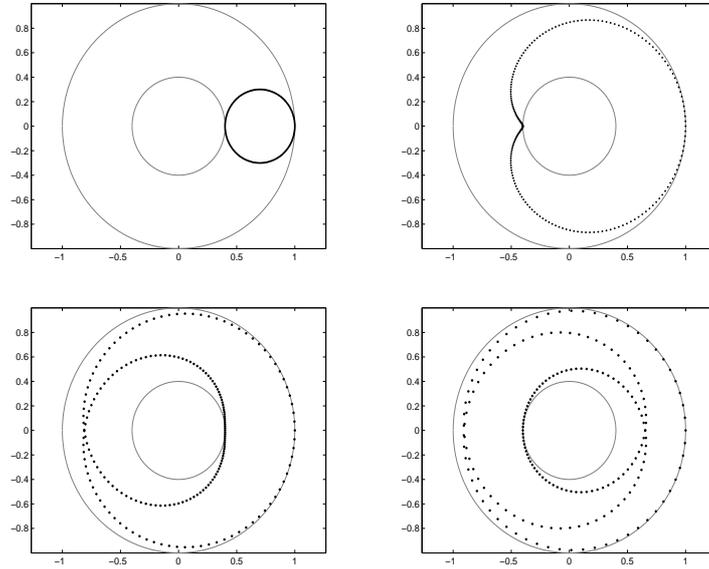


Figura 3.2: Evoluzione degli autovalori dello schema \mathbb{P}_1 al variare del numero di Courant (da sinistra in alto: $\alpha = 0.3, 1.3, 2.3, 3.3$). Il cerchio esterno è il bordo del disco unitario, mentre quello interno è legato alla rotazione degli autovalori.

Osservando il grafico si può notare che gli autovalori sono situati su di una *epitrocoide*. Ne abbiamo trovato l'equazione:

$$\begin{cases} x = (1 - (\alpha - [\alpha])) \cos t + (\alpha - [\alpha]) \cos\left(\frac{[\alpha]+1}{[\alpha]}t\right) \\ y = (1 - (\alpha - [\alpha])) \sin t + (\alpha - [\alpha]) \sin\left(\frac{[\alpha]+1}{[\alpha]}t\right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Quindi avere $\alpha > 1$ in modulo aggiunge una componente di rotazione degli autovalori che possiamo tralasciare limitandoci a studiare il caso $\alpha \in [0, 1]$.

Capitolo 4

Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani ad elementi finiti \mathbb{P}_2

4.1 Costruzione dello schema e curva degli autovalori

Per quanto osservato nel caso \mathbb{P}_1 , discuteremo la stabilità dello schema sotto l'ipotesi di numeri di Courant $\alpha = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \in [0, 1]$. Si ottiene che lo schema ad elementi finiti \mathbb{P}_2 (distinguendo tra nodi pari e nodi dispari) è dato da

$$v_{j, j=2l-1}^{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\alpha - 2)v_{2l-1}^n - \alpha(\alpha - 2)v_{2l}^n + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)v_{2l+1}^n$$

$$v_{j, j=2l}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)v_{2l-1}^n - (\alpha + 1)(\alpha - 1)v_{2l}^n + \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1)v_{2l+1}^n.$$

e pertanto la matrice di iterazione è

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} & \alpha(2-\alpha) & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & (1-\alpha^2) & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} & \alpha(2-\alpha) & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & (1-\alpha^2) & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} & \alpha(2-\alpha) \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & (1-\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

Sfruttando la relazione esistente tra le soluzioni ai due estremi di ogni intervallo (eliminando quindi i nodi intermedi) ed iterando su tutti gli intervalli si giunge infine a determinare la curva su cui sono situati gli autovalori (vedi fig. 4.1):

$$\left[\frac{2\lambda^2 + \lambda(\alpha + 4)(\alpha - 1) + (\alpha - 2)(\alpha - 1)}{\lambda\alpha(\alpha - 1) + \alpha(\alpha + 1)} \right]^N = 1 \quad (4.1)$$

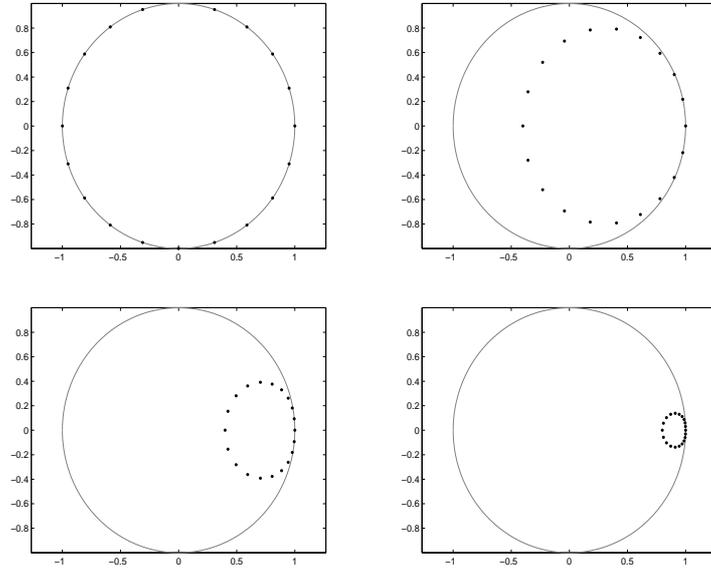


Figura 4.1: Autovalori dello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_2 al variare del numero di Courant $\alpha = 1, 0.7, 0.3, 0.1$.

Calcolando analiticamente le soluzioni della 4.1 si ottiene infine che l'equazione che descrive la parte immaginaria degli autovalori in funzione della

loro parte reale (e del numero di Courant $\alpha \in [0, 1]$) e che vale nell'intervallo $[1 - 2\alpha, 1] \subset [-1, 1]$ è la seguente (vedi fig. 4.2):

$$y = \pm \sqrt{\frac{-[2x^2 + x(\alpha + 4)(\alpha - 1) + (2\alpha^2 + \alpha - 2)(\alpha - 1)] + \sqrt{\Delta(x, \alpha)}}{2}} \quad (4.2)$$

per $x \in [1 - 2\alpha, 1]$ e con

$$\begin{aligned} \Delta(x, \alpha) = & x^2\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha + 7) + 2x\alpha^2(\alpha - 1)(2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + \\ & + \alpha^2(4\alpha^4 - 4\alpha^3 - 11\alpha^2 + 22\alpha - 7). \end{aligned}$$

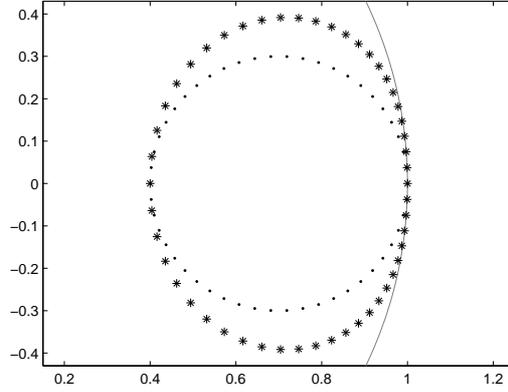


Figura 4.2: Confronto tra gli autovalori dello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1 (punti) e quelli del metodo \mathbb{P}_2 (asterischi) con numero di Courant fissato $\alpha = 0.3$ (la linea continua rappresenta il bordo del disco unitario).

4.2 Proprietà degli autovalori

Abbiamo ottenuto che le seguenti proprietà sono soddisfatte dagli autovalori e dalla matrice di iterazione dello schema.

Proposizione 4.1. *Gli autovalori di uno schema semi-Lagrangiano di tipo elementi finiti \mathbb{P}_2 con numero di Courant $\alpha \in [0, 1]$ hanno modulo non superiore ad 1.*

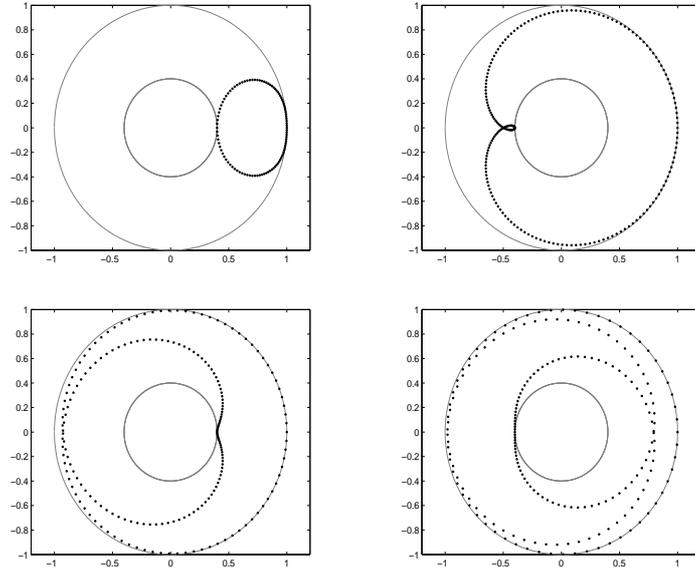


Figura 4.3: Evoluzione degli autovalori dello schema \mathbb{P}_2 al variare del numero di Courant (da sinistra in alto: $\alpha = 0.3, 1.3, 2.3, 3.3$). Il cerchio esterno è il bordo del disco unitario, mentre quello interno è legato alla rotazione degli autovalori.

Proposizione 4.2. *La curva degli autovalori di uno schema semi-Lagrangiano di tipo elementi finiti \mathbb{P}_2 con numero di Courant $\alpha \in [0, 1]$ è circoscritta alla circonferenza \mathcal{C} di centro $(1 - \alpha)$ e raggio α .*

Proposizione 4.3. *La matrice di iterazione di uno schema semi-Lagrangiano di tipo elementi finiti \mathbb{P}_2 è diagonalizzabile.*

4.3 Quasi-normalità e pseudospettro della matrice di iterazione

Abbiamo visto che gli autovalori nel caso di interpolazioni di tipo elementi finiti \mathbb{P}_2 sono tutti contenuti nel disco unitario. Inoltre sono semplici e quindi la matrice è diagonalizzabile. Per poter concludere che lo schema è stabile avremmo quindi bisogno di stimare il numero di condizionamento di Ψ_α oppure di poter asserire che la matrice Ψ_α è normale.

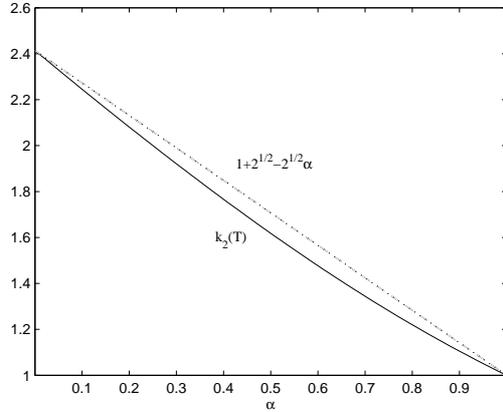


Figura 4.4: Il grafico evidenzia le stime (4.3) e (4.4) trovate.

Purtroppo i vari tentativi effettuati per stimare analiticamente il numero di condizionamento sono stati infruttuosi. Inoltre, come è facile verificare, la matrice Ψ_α non è, in generale, normale. Essa però è in realtà "quasi-normale", cioè può essere considerata come una piccola perturbazione di una matrice normale.

Abbiamo stimato il numero di condizionamento al massimo dell'accuratezza possibile con la precisione di macchina a nostra disposizione, verificando che si ottiene (vedi 4.4)

$$\max \{k_2(T_\alpha), 10^{-8} \leq \alpha \leq 1, \Delta\alpha = 10^{-3}\} \approx 2.41421366 \quad (4.3)$$

$$k_2(T) = \|T_\alpha\|_2 \|T_\alpha^{-1}\|_2 \approx (2.41421366) - 1.41421366\alpha. \quad (4.4)$$

Pertanto la stima sul numero di condizionamento sembra convergere e quindi possiamo dedurre che lo schema con elementi finiti \mathbb{P}_2 è stabile.

La diagonalizzabilità della matrice, unitamente alla maggiorazione del numero di condizionamento, è sufficiente per garantirci la stabilità dello schema. Ma per rafforzare tale conclusione si può anche vedere che la matrice Ψ_α nel caso \mathbb{P}_2 è quasi-normale.

Abbiamo osservato che Ψ_α soddisfa una condizione necessaria affinché una matrice sia normale, ovvero quella della sua diagonalizzabilità. Inoltre, come per le matrici normali le trasformazioni che le diagonalizzano sono

unitarie, abbiamo verificato che anche gli autovalori della matrice T_α che diagonalizza Ψ_α hanno modulo "quasi" unitario (vedi fig. 4.5)

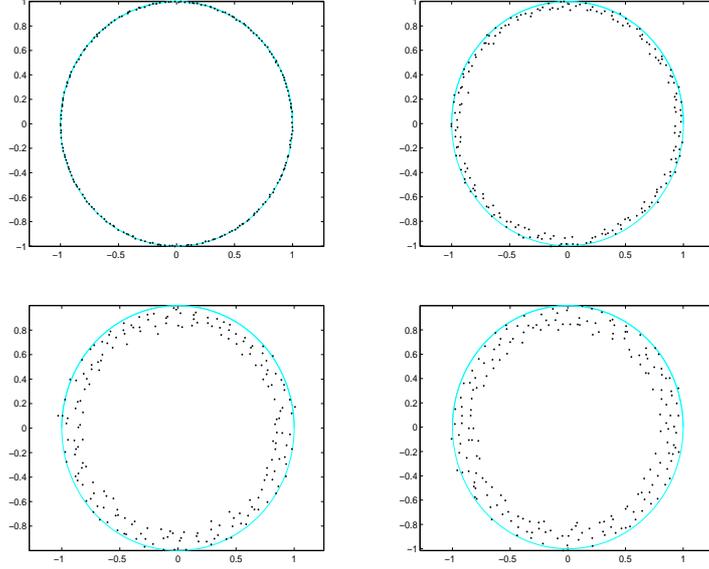


Figura 4.5: Autovalori della matrice di trasformazione T_α che diagonalizza Ψ_α al variare del numero di Courant $\alpha = 0.9, 0.5, 0.1, 10^{-8}$. Si può osservare come gli autovalori restino abbastanza vicini al bordo del disco unitario anche per valori di α molto piccoli.

Infine, come ulteriore verifica della quasi-normalità della matrice Ψ_α , ne abbiamo calcolato il relativo pseudospettro e lo abbiamo confrontato con quello di un'opportuna matrice normale.

In un primo momento abbiamo calcolato lo pseudospettro di Ψ_α probabilisticamente con delle perturbazioni random, confrontando il risultato trovato con la stima prevista dal teorema di Kreiss sulle matrici come condizione sufficiente per l'uniforme limitatezza di $\|\Psi_\alpha^n\|$ (vedi fig. 4.6 e 4.7).

Infine abbiamo osservato che la quasi-normalità della matrice Ψ_α risiede nel fatto di essere molto vicina alla seguente matrice normale

$$\tilde{\Psi}_\alpha = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\alpha+4)(1-\alpha) & \alpha(5-\alpha) & \alpha(\alpha-1) & 0 & \cdots & \alpha(\alpha-1) \\ \alpha(\alpha-1) & (\alpha+4)(1-\alpha) & \alpha(5-\alpha) & \alpha(\alpha-1) & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

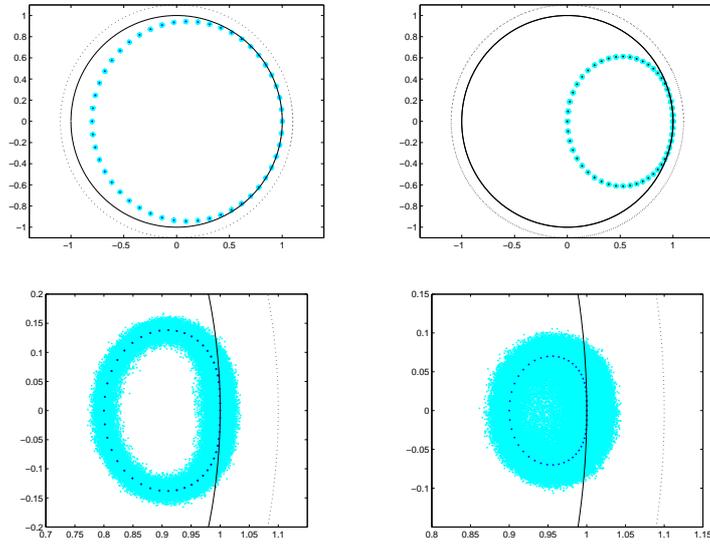


Figura 4.6: I grafici illustrano il comportamento dello pseudospettro della matrice di iterazione Ψ_α al variare del numero di Courant ($\alpha = 0.9, 0.5, 0.1, 0.05$, ϵ fissato). La linea tratteggiata è la stima prevista dal teorema di Kreiss come condizione sufficiente per la limitatezza delle potenze di Ψ_α .

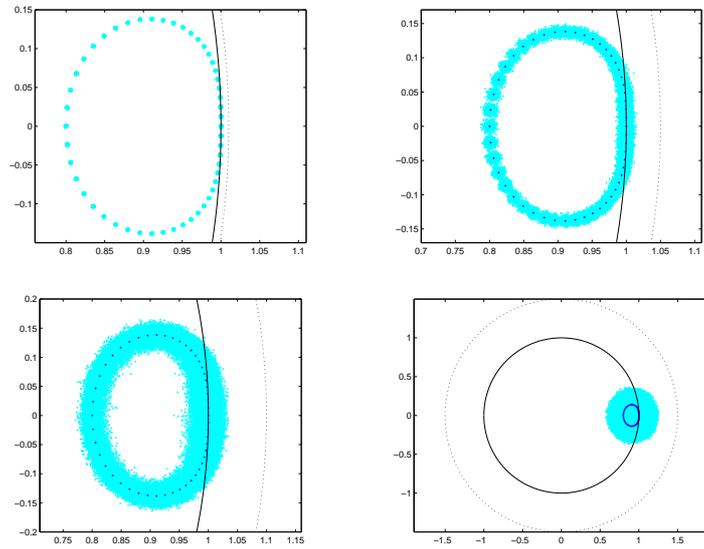


Figura 4.7: Cambiamento dello pseudospettro al variare dell'entità della perturbazione ($\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5$, $\alpha = 0.1$ fissato).

costruita a partire da Ψ_α effettuando le medie

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j+1}}{2}.$$

Per verificarlo abbiamo calcolato sia gli spettri delle due matrici che gli pseudospettri, calcolati questa volta utilizzando le curve di livello di $\sigma_{\min}(zI - \Psi_\alpha)$ (vedi fig. 4.8 e 4.9).

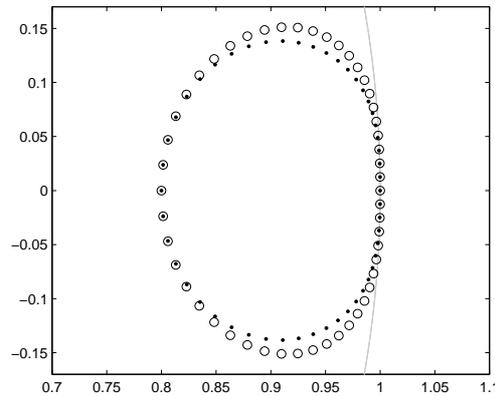


Figura 4.8: Gli autovalori delle matrici Ψ_α (punti) e $\tilde{\Psi}_\alpha$ (cerchietti) a confronto: si può notare come gli spettri siano molto simili e l'ipotesi che siano una piccola perturbazione l'uno dell'altro sembra fondata (il grafico è stato ottenuto per $\alpha = 10^{-1}$ ma al variare del parametro α rimane qualitativamente equivalente).

4.4 Ricostruzioni con elementi finiti \mathbb{P}_r

Nel caso generale di ricostruzioni di ordine r ad elementi finiti \mathbb{P}_r si utilizzerà la base di polinomi di interpolazione di grado r . Abbiamo trovato che in tale caso l'equazione degli autovalori dello schema può sempre essere scritta nella forma

$$[f(\lambda, \alpha)]^N = 1. \quad (4.6)$$

dove $f(\lambda, \alpha)$ è una funzione complessa, composizione iterata di funzioni razionali e N è il numero di intervalli di interpolazione utilizzati.

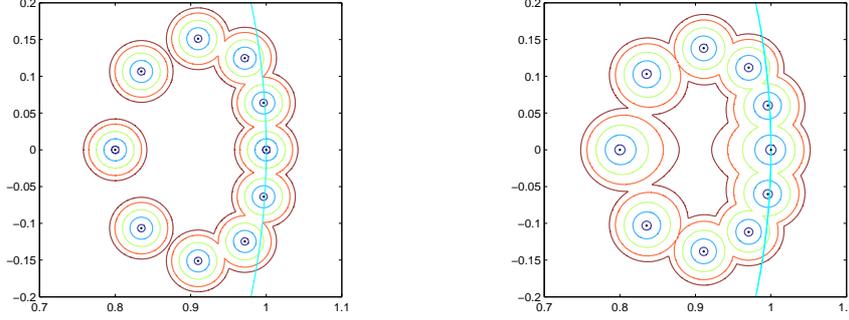


Figura 4.9: Gli pseudospettri della matrice normale $\tilde{\Psi}_\alpha$ (a sinistra) e di quella quasi-normale Ψ_α (a destra) a confronto. Il grafico mostra le curve di livello della funzione $\sigma_{\min}(zI - \Psi)$. Si può vedere come lo pseudospettro di Ψ_α presenti delle piccole deformazioni rispetto a quello di $\tilde{\Psi}_\alpha$, peraltro orientate verso l'interno del cerchio unitario, quindi in maniera tale da non compromettere la stabilità dello schema.

Ad esempio per le ricostruzioni ad elementi finiti del terzo ordine \mathbb{P}_3 , si ottiene l'equazione

$$\left[\frac{6\lambda^3 + \lambda^2(\alpha-1)(\alpha^2+7\alpha+18) + 2\lambda(\alpha-1)(2\alpha^2+2\alpha-9) + (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{\lambda^2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 4\lambda\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) + \alpha(\alpha+2)(\alpha+1)} \right]^N = 1$$

di cui in figura 4.10 è rappresentata la curva degli autovalori, messa a confronto con la corrispondente curva dello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1 .

4.5 Discretizzazioni spaziali non uniformi

Estendiamo l'analisi fin qui condotta al caso più generale di schemi con discretizzazione spaziale non uniforme. Vedremo dapprima ciò che accade nello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1 per poi generalizzare con gli schemi di ordine $r > 1$.

4.5.1 Elementi finiti \mathbb{P}_1

Abbiamo verificato che, adottando l'ipotesi di numeri di Courant locali $\alpha_j \in [0, 1]$, il metodo da noi adottato è applicabile anche a discretizzazioni non

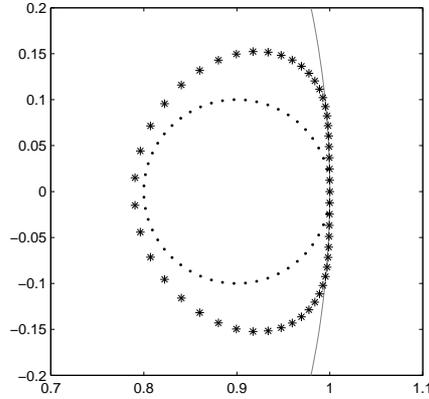


Figura 4.10: Confronto tra gli autovalori dello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1 (punti) e quelli del metodo \mathbb{P}_3 (asterischi) con numero di Courant fissato $\alpha = 0.1$ (la linea continua rappresenta il bordo del disco unitario).

regolari. Si trova che è sempre soddisfatta la relazione

$$\min_j \left| \frac{\lambda - (1 - \alpha_j)}{\alpha_j} \right|^N \leq \prod_{j=1}^N \left| \frac{\lambda - (1 - \alpha_j)}{\alpha_j} \right| \leq \max_j \left| \frac{\lambda - (1 - \alpha_j)}{\alpha_j} \right|^N. \quad (4.7)$$

e si può quindi concludere, prendendo le curve di livello 1, che gli autovalori dello schema con nodi non uniformi sono racchiusi tra la curva di livello più grande e quella più piccola, che corrispondono alle curve che si ottengono rispettivamente per $\alpha_{\min} = \min_j \alpha_j$ e per $\alpha_{\max} = \max_j \alpha_j$ (vedi fig. 4.11) e quindi sono comunque contenuti nel disco unitario.

4.5.2 Elementi finiti \mathbb{P}_r

Estendiamo quanto visto nel paragrafo precedente al caso generale di uno schema di ordine r .

In tal caso, con l'ipotesi $\alpha_j \in [0, 1]$, si ottiene che

$$\min_j |f(\lambda, \alpha_j)|^N \leq \prod_{j=1}^N |f(\lambda, \alpha_j)| \leq \max_j |f(\lambda, \alpha_j)|^N. \quad (4.8)$$

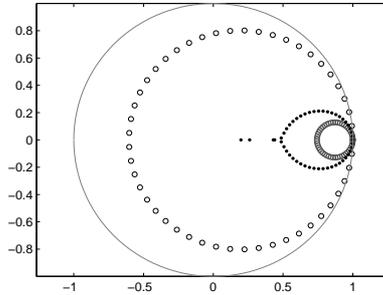


Figura 4.11: Gli autovalori dello schema \mathbb{P}_1 con nodi non uniformi (rappresentati con dei dischi pieni) sono racchiusi tra la curva relativa al numero di Courant minimo e quella relativa al massimo (il cerchio esterno è il disco unitario). Il test è stato effettuato mediante una distribuzione random con 50 nodi; i numeri di Courant locali minimo e massimo sono risultati rispettivamente $\alpha_{\min} = 0.138$ e $\alpha_{\max} = 0.787$.

Nuovamente, dalla (4.8) possiamo concludere, prendendo le curve di livello 1, che gli autovalori dello schema sono racchiusi tra la curva di livello più grande e quella più piccola, che corrispondono, in base ai risultati del capitolo 4, alle curve di livello con numeri di Courant minimo e massimo (vedi fig. 4.12). Di conseguenza gli autovalori sono comunque contenuti nel disco unitario.

4.6 Criticità delle ricostruzioni non regolari

Uno dei problemi nell'analisi fin qui condotta è costituito dal dover supporre che tutti i numeri di Courant locali siano minori di 1. Tale ipotesi esclude quindi i casi con passi in tempo ampi o con discretizzazioni spaziali molto fitte.

Un problema che resta aperto è poi quello relativo alla molteplicità degli autovalori. Nonostante dal punto di vista numerico sembri che anche in questo tipo di ricostruzioni gli autovalori siano semplici, i tentativi effettuati per dimostrarlo non hanno dato frutti. Pertanto resta insoluta la questione sulla diagonalizzabilità della matrice di iterazione.

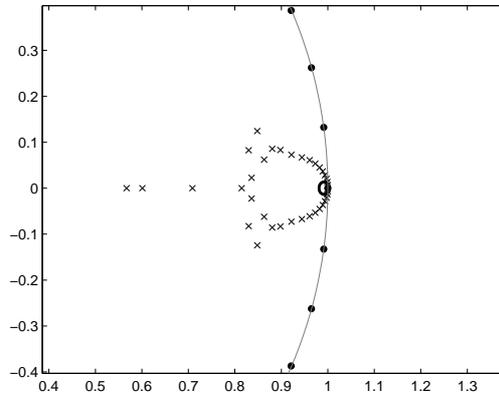


Figura 4.12: Gli autovalori dello schema \mathbb{P}_2 con nodi non uniformi (rappresentati con delle x) sono racchiusi tra la curva relativa al numero di Courant minimo e quella relativa al massimo. Il test è stato effettuato mediante una distribuzione random con 40 nodi; i numeri di Courant locali minimo e massimo sono risultati rispettivamente $\alpha_{\min} = 9.78 \cdot 10^{-3}$ e $\alpha_{\max} = 0.733$.

Infine non si sono trovati elementi per poter asserire che anche nelle ricostruzioni con griglie non uniformi la matrice di iterazione sia quasi-normale.

Capitolo 5

Stabilità degli schemi semi-Lagrangiani con interpolazione cubica simmetrica

5.1 Costruzione dello schema

Nelle interpolazioni polinomiali localmente di ordine alto la base non è fissata a priori ma dipende dal punto in cui si effettua la ricostruzione. Si ottiene che, sotto l'ipotesi di numeri di Courant $\alpha = -a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, lo schema discreto sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ è

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & -\frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-2)v_j^n + \\ & -\frac{1}{2}(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)v_{j+1}^n + \frac{1}{6}(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)v_{j+2}^n . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Quindi la matrice di iterazione Ψ_α per le ricostruzioni lagrangiane cubiche locali è la seguente matrice circolante (quadrata)

$$\begin{pmatrix} \frac{(\alpha^2-1)(\alpha-2)}{2} & \frac{(\alpha^2+\alpha)(2-\alpha)}{2} & \frac{\alpha^3-\alpha}{6} & 0 & \dots & \frac{(\alpha^2-\alpha)(2-\alpha)}{6} \\ \frac{(\alpha^2-\alpha)(2-\alpha)}{6} & \frac{(\alpha^2-1)(\alpha-2)}{2} & \frac{(\alpha^2+\alpha)(2-\alpha)}{2} & \frac{(\alpha^3-\alpha)}{6} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

5.2 Curva descritta dagli autovalori

Sfortunatamente in questo caso non è applicabile l'idea che abbiamo usato negli schemi ad elementi finiti, ossia quella di sfruttare la relazione che emerge tra i due nodi esterni dell'intervallo considerato quando si "eliminano" tutti i nodi interni, per poi imporre la condizione di periodicità al bordo ed ottenere quindi gli autovalori.

Infatti nel caso delle interpolazioni lagrangiane cubiche locali non è possibile ottenere un sistema di $n - 1$ equazioni in n incognite come in quanto l'elemento della ricostruzione non è fissato ma "trasla" assieme al punto di interpolazione considerato. Abbiamo seguito pertanto, in questo caso, un approccio diverso per determinare l'equazione degli autovalori e la curva su cui essi giacciono.

Abbiamo cercato le soluzioni dello schema sotto l'ipotesi che le stesse fossero della forma $v_j = \rho^j$, $\rho \in \mathbb{C}$. Tale ipotesi non è arbitraria ma è legata allo sviluppo in serie di Fourier della soluzione. L'equazione trovata per gli autovalori è della forma

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha, \theta) = & L_0(\alpha) + (L_{-1}(\alpha) + L_1(\alpha)) \cos \theta + L_2(\alpha) \cos 2\theta \\ & + \mathbf{i} [(L_1(\alpha) - L_{-1}(\alpha)) \sin \theta + L_2(\alpha) \sin 2\theta] \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove θ è un parametro legato all'autovalore che si prende in esame (è l'angolo della radice unitaria corrispondente). Esplicitando parte reale e parte immaginaria si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x(\alpha, \theta) = L_0(\alpha) + (L_{-1}(\alpha) + L_1(\alpha)) \cos \theta + L_2(\alpha) \cos 2\theta \\ y(\alpha, \theta) = (L_1(\alpha) - L_{-1}(\alpha)) \sin \theta + L_2(\alpha) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (5.3)$$

Per θ fissato, che equivale a scegliere una delle q radici, le (5.3) descrivono, al variare del numero di Courant α , l'evoluzione del relativo autovalore (vedi fig. (5.1)).

Se invece fissiamo α e facciamo variare l'angolo θ sull'insieme discreto degli angoli delle q radici, otterremo ovviamente gli autovalori dello schema relativi al numero di Courant α (vedi fig. (5.2)).

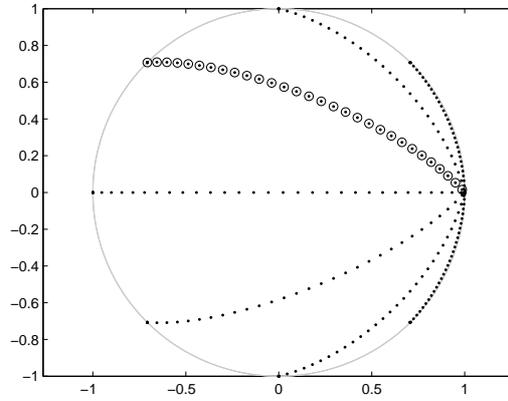


Figura 5.1: Evoluzione degli autovalori dello schema lagrangiano cubico al variare del numero di Courant. Per $\alpha = 1$ gli autovalori coincidono con le radici dell'unità sul disco unitario, poi si muovono al variare di α lungo le traiettorie nel grafico. In evidenza la traiettoria relativa all'autovalore che si ottiene prendendo, ad esempio, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ fissato nelle (5.3).

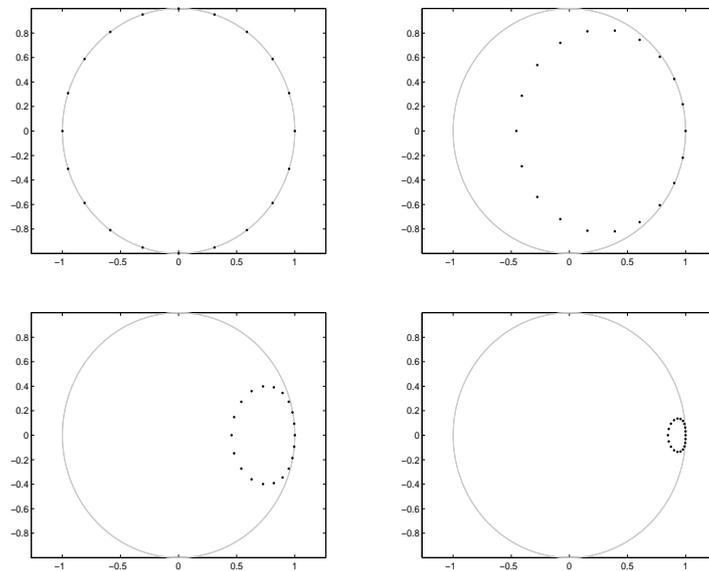


Figura 5.2: Autovalori dello schema lagrangiano cubico al variare del numero di Courant $\alpha = 1, 0.7, 0.3, 0.1$.

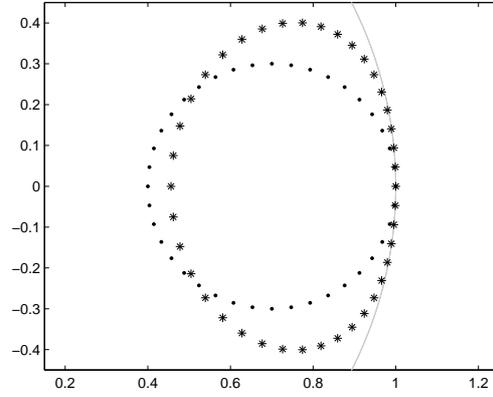


Figura 5.3: Confronto tra gli autovalori dello schema ad elementi finiti \mathbb{P}_1 (punti) e quelli del metodo lagrangiano cubico (asterischi) con numero di Courant fissato $\alpha = 0.3$.

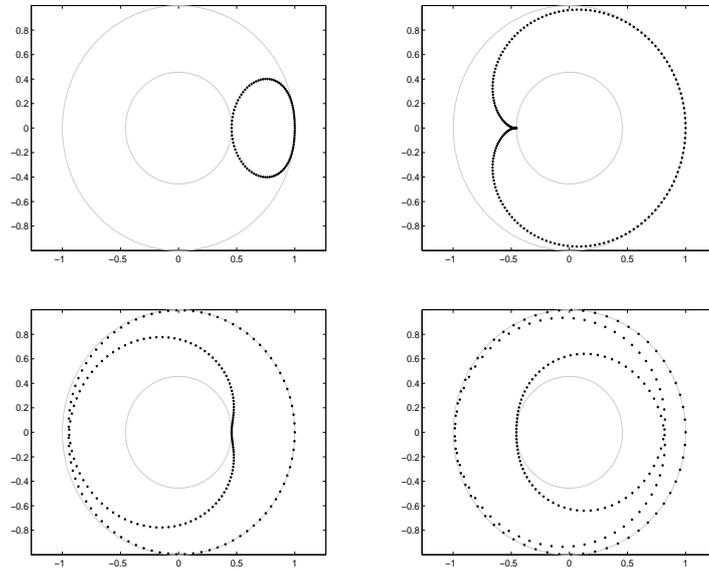


Figura 5.4: Evoluzione degli autovalori dello schema lagrangiano cubico al variare del numero di Courant (da sinistra in alto: $\alpha = 0.3, 1.3, 2.3, 3.3$). Il cerchio esterno è il bordo del disco unitario, mentre quello interno è legato alla rotazione degli autovalori.

5.3 Proprietà degli autovalori

Sfortunatamente, la dipendenza delle equazioni degli autovalori (5.2) o (5.3) da due incognite non ci ha consentito di esplicitare parte immaginaria contro parte reale degli autovalori, al fine di dimostrare che sono sempre contenuti nel cerchio unitario. Anche la maggiorazione del modulo di (5.2) ha presentato difficoltà per una dimostrazione formale rigorosa. Abbiamo quindi optato per una verifica numerica del fatto che effettivamente valga:

$$|\lambda(\alpha, \theta)| \leq 1 \quad \forall \alpha \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (5.4)$$

Abbiamo quindi calcolato un grafico del modulo degli autovalori rispetto al piano (α, θ) , ottenendo la conferma che la relazione (5.4) è soddisfatta (vedi fig. (5.5)).

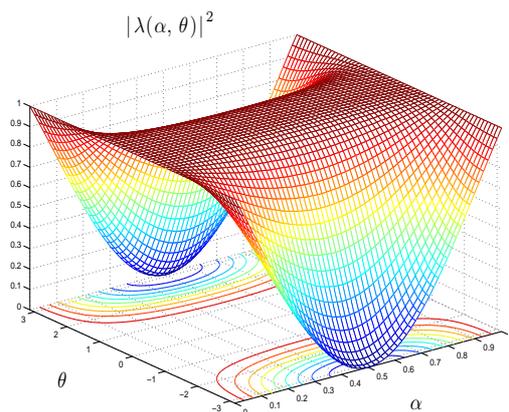


Figura 5.5: Modulo degli autovalori dello schema lagrangiano cubico al variare del numero di Courant e (dell'angolo) della radice dell'unità considerata. Si può vedere che il modulo è sempre minore di 1.

Bibliografia

- [B] R. Bermejo, *Analysis of a class of quasi-monotone and conservative semi-Lagrangian advection schemes*, Numerische Mathematik **87** (2001), 597-623
- [BM] N. Besse e M. Mehrenberger, *Convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system*, preprint
- [CL] P. G. Ciarlet e J. L. Lions, *Finite element methods (part 1)*, Handbook of Numerical analysis, Vol. II, North Holland (1991)
- [DKS] J. L. M. van Dorselaer, J. F. B. M. Kraaijevanger e M. N. Spijker, *Linear stability analysis in the numerical solution of initial value problems*, Acta Numerica (1993), 199-237
- [FF] M. Falcone e R. Ferretti, *Discrete-time high-order schemes for viscosity solution of Hamilton-Jacoby-Bellman equations*, Numerische Mathematik **67** (1994), 315-344
- [FF2] M. Falcone e R. Ferretti, *Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes*, SIAM Journal on Numerical Analysis **35** (1998), 909-940
- [H] P. Henrici, *Bounds for iterates, inverses, spectral variation and fields of values of non-normal matrices*, Numerische Mathematik **4** (1962), 24-40
- [HS] H. Hong, S. Steinberg, *Accuracy and stability of polynomial interpolation schemes for advection equations*, preprint (2001), disponibile all'indirizzo <http://math.unm.edu/~stanly/prints/optimal.PS>

- [M] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM (2000)
- [P] O. Pironneau, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations* *Numerische Mathematik* **38** (1982), 309-332
- [QSS] A. Quarteroni, R. Sacco e F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, New York (2000)
- [RM] R. D. Richtmeyer e K. W. Morton, *Difference methods for initial value problems*, Interscience, New York (1967)
- [S1] P. Šolin, *Partial differential equations and the finite element method*, J. Wiley & Sons, New York (2005)
- [SC] A. Staniforth e J. Coté, *Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models - a review*, *Monthly Weather Review* **119** (1991), 2206-2223
- [T] L. N. Trefethen, *Pseudospectra of linear operators*, *SIAM Review* **39** (1997), 383-406
- [T2] L. N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, testo non pubblicato (1996), disponibile all'indirizzo web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/pdetext.html
- [T3] L. N. Trefethen, *Computation of pseudospectra*, *Acta Numerica* (1999), 247-295
- [TT] K. C. Toh e L. N. Trefethen, *The Kreiss matrix theorem on a general complex domain* *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **21** (1999), 145-165
- [W] E. W. Weisstein, *Epitrochoid*, MathWorld - A Wolfram Web Resource (sito internet) <http://mathworld.wolfram.com/Epitrochoid.html>