

Università Roma Tre  
Facoltà Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Matematica

La famiglia di distribuzioni normali  
asimmetriche  
Alcune proprietà

Relatore:  
Prof. Brunero Liseo

Laureanda:  
Francesca Pederzoli

Anno Accademico

2004/2005

La famiglia di distribuzioni normali  
asimmetriche  
Alcune proprietà

---

La classe di distribuzioni normali asimmetriche, denotata con il simbolo  $SN$ , è una famiglia di densità di probabilità che generalizza la legge normale introducendo una possibile asimmetria. La distribuzione normale asimmetrica, intesa proprio come generalizzazione della legge normale, è uno strumento molto utile in quelle situazioni pratiche in cui l'istogramma dei dati osservati presenta una certa dose di asimmetria. È importante notare anche che, a differenza di altre proposte esistenti in letteratura, la famiglia  $SN$  consente di passare dal caso simmetrico a quello asimmetrico con continuità, modificando un solo valore di un parametro.

Da un punto di vista teorico, la classe normale asimmetrica, ha il vantaggio di essere matematicamente trattabile e di godere di un buon numero di proprietà tipiche della distribuzione normale.

La prima analisi sistematica della classe normale asimmetrica nel caso scalare è stata effettuata da Azzalini (1985,1986); successivamente, Azzalini e Dalla Valle (1996) hanno introdotto la versione multidimensionale della densità normale asimmetrica. In seguito c'è stata un'esplosione di ricerca nel settore.

Citiamo, come esempio, l'articolo di Arnold e Beever (2000) nel quale viene proposta una generalizzazione in cui la curva normale viene sostituita da distribuzioni con code più pesanti, come per esempio, la distribuzione multivariata asimmetrica di Cauchy.

### **Distribuzione normale asimmetrica univariata**

Diciamo che  $Z$  è una variabile casuale normale asimmetrica con parametro  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , se ha la seguente funzione di densità

$$g(z; \alpha) = 2\phi(z)\Phi(\alpha z) \quad -\infty < z < \infty \quad (1)$$

con  $\phi$  e  $\Phi$  rispettivamente la densità normale standardizzata e la funzione di ripartizione della normale standardizzata.

Per brevità, indichiamo la v.a. con densità (1) col simbolo  $Z \sim SN(\alpha)$ .

Vediamo in questo paragrafo alcune delle più interessanti proprietà della  $SN(\alpha)$  :

#### **Proprietà 1**

La densità di  $SN(0)$  è la densità della  $N(0,1)$ .

---

### Proprietà 2

Se  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $g(z; \alpha)$  tende ad una densità semi-normale, ovvero

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g(z; \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}, \quad z > 0;$$

### Proprietà 3

Se  $Z \sim SN(\alpha)$ , allora  $-Z \sim SN(-\alpha)$ .

### Proprietà 4

Se  $Z \sim SN(\alpha)$ , allora  $Z^2 \sim \chi_1^2$ .

La funzione generatrice dei momenti della  $Z \sim SN(\alpha)$  è:

$$M(t) = 2\exp(t^2/2)\Phi(\rho t) \tag{2}$$

dove  $\rho$  è collegato ad  $\alpha$  attraverso la relazione:

$$\alpha(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \rho(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{3}$$

Derivando la (2) e calcolando in zero le derivate successive si possono ottenere i momenti

$$E(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho \tag{4}$$

$$Var(Z) = 1 - \frac{2}{\pi}\rho \tag{5}$$

### Rappresentazione stocastica

Esistono diversi metodi per costruire una variabile aleatoria normale asimmetrica. Questi metodi hanno una importanza sia teorica che pratica in quanto consentono una facile generazione di valori pseudo-casuali da una legge normale asimmetrica. Riportiamo qui le tre rappresentazioni stocastiche principali.

**Rappresentazione 1.** Sia

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right].$$

---

Allora, la variabile aleatoria  $Z$ , definita come

$$Z = [U_1 | U_0 > 0] \sim SN\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

**Rappresentazione 2.** Minimo e massimo di due v.a. normali correlate.

Sia

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Allora

$$Z = U_0 \vee U_1 \sim SN\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right).$$

$$Z = U_0 \wedge U_1 \sim SN\left(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right).$$

**Rappresentazione 3.** Siano

$V_0$  e  $V_1$  variabili aleatorie indipendenti  $N(0, 1)$ , e sia  $\delta \in (-1, 1)$ . Allora

$$Z = \delta |V_0| + \sqrt{1-\delta^2}V_1 \sim SN\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right).$$

### Distribuzione normale asimmetrica multivariata

La distribuzione normale asimmetrica multivariata rappresenta un tentativo di definire una classe di distribuzioni di probabilità in grado di modellare dati multidimensionali che non soddisfano alcuni vincoli imposti dall'ipotesi di normalità, come ad esempio la simmetria delle componenti marginali.

Vengono proposte due tecniche per introdurre la versione multivariata della distribuzione normale asimmetrica. Esse si rifanno alle rappresentazioni stocastiche unidimensionali.

---

## Metodo di trasformazione

In base alla **rappresentazione 3** cominciamo a considerare una variabile aleatoria normale  $k$ -dimensionale  $Y = (Y_1, \dots, Y_k)^T$  le cui distribuzioni marginali sono standardizzate  $N(0, 1)$ , e una variabile aleatoria  $Y_0 \sim N(0, 1)$  tale che

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{k+1} \left( 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

dove  $\Psi$  è la matrice di correlazione  $k \times k$ . Siano  $(\delta_1, \dots, \delta_k)$ ,  $k$  valori compresi in  $(-1, 1)$  e definiamo

$$Z_j = \delta_j |Y_0| + (1 - \delta_j^2)^{1/2} Y_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (7)$$

cosicché  $Z_j \sim SN\{\lambda(\delta_j)\}$ . Si dimostra che la densità del vettore  $Z = (Z_1, \dots, Z_k)^T$  è:

$$f_k(z) = 2\phi_k(z; \Omega)\Phi(\alpha^T z) \quad z \in \mathfrak{R}^k \quad (8)$$

dove

$$\alpha^T = \frac{\lambda^T \Psi^{-1} \Delta^{-1}}{(1 + \lambda^T \Psi^{-1} \lambda)^{1/2}} \quad (9)$$

$$\Delta = \text{diag}((1 - \delta_1^2)^{1/2}, \dots, (1 - \delta_k^2)^{1/2})$$

$$\lambda = (\lambda(\delta_1), \dots, \lambda(\delta_k))^T \quad (10)$$

$$\Omega = \Delta(\Psi + \lambda\lambda^T)\Delta \quad (11)$$

e  $\phi_k(z; \Omega)$  denota la funzione densità di una distribuzione normale multivariata  $k$ -dimensionale con margini standardizzati e matrice di correlazione  $\Omega$ .

Diremo che una variabile casuale  $Z$  con funzione di densità data dalla (8) è una variabile normale asimmetrica  $k$ -dimensionale, con vettore  $\lambda$  di forma e parametro di dispersione  $\Psi$ .

Per brevità, scriveremo

$$Z \sim SN_k(\lambda, \Psi) \quad (12)$$

---

## Metodo condizionato

La **rappresentazione 1** suggerisce un altro schema. Sia  $X = (X_0, X_1, \dots, X_k)^T$  una variabile casuale normale multivariata  $(k + 1)$ -dimensionale tale che

$$X \sim N_{k+1}(0, \Omega^*) \quad (13)$$

dove

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 & \cdots & \delta_k \\ \delta_1 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ \delta_k & & & \end{pmatrix}; \quad (14)$$

possiamo considerare la distribuzione di  $(X_1, \dots, X_k)$  dato  $X_0 > 0$ . Dalla **rappresentazione 1**, si può vedere che per ogni  $j = 1, \dots, k$  la distribuzione di  $X_j | X_0$  è una  $SN_k(\lambda(\delta_j))$ . Può allora essere ragionevole definire una distribuzione aleatoria normale asimmetrica multivariata con la distribuzione del vettore  $(X_1, \dots, X_k)$  dato  $X_0 > 0$ . In realtà si può dimostrare che la distribuzione così ottenuta coincide con quella ottenuta attraverso il metodo di trasformazione del paragrafo precedente.

In pratica il metodo basato sulla trasformazione e il metodo basato sul condizionamento differiscono nel fatto seguente: nel primo caso si sostituisce  $Y_0$  con il valore assoluto di  $Y_0$ , mentre nel secondo caso si condiziona all'evento  $Y_0 > 0$ . La simmetria della densità  $N(0, 1)$  rende queste due operazioni equivalenti, e dunque la distribuzione di  $(X'_1, \dots, X'_k)$  condizionatamente all'evento  $X'_0 > 0$  è la stessa della (7).

Il fatto che  $\Omega^*$  debba essere definita positiva impone alcune restrizioni sugli elementi di  $\Omega$ , per valori di  $\delta_j$ . Per questo motivo è consigliabile definire la variabile normale asimmetrica come nella formula (12) in quanto in questo modo non è necessario imporre alcun vincolo alla matrice di dispersione.

## Distribuzione ellittica asimmetrica multivariata

Azzalini e Dalla Valle presentarono una teoria generale sulla versione multivariata di una distribuzione normale asimmetrica multivariata. Il loro articolo propone

---

differenti metodi per generare distribuzioni SN. Esistono poi estensioni a distribuzioni ellittiche asimmetriche multivariate. Consideriamo un metodo condizionato per formare una nuova classe di distribuzioni. Consideriamo  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$  un vettore casuale. Sia  $X^* = (X_0, X^T)^T$  un vettore casuale  $(k+1)$  dimensioni, tale che  $X^* \sim El_{k+1}(\mu^*, \Sigma)$ , dove  $\mu^* = (0, \mu)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)^T$  e  $\Sigma$  ha la forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \delta^T \\ \delta & \Omega \end{pmatrix}$$

con  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$ . Qui  $\Omega$  è la matrice scalare associata al vettore  $X$ .

Affermiamo che il vettore  $Y = [X \mid X_0 > 0]$  ha una distribuzione ellittica asimmetrica e si indica con  $Y \sim SE_k(\mu, \Omega, \delta)$ , dove  $\delta$  è il parametro di asimmetria. Se la densità di un vettore casuale  $X^*$  esiste e  $P(X^* = 0) = 0$ , allora la funzione di distribuzione di  $Y$  sarà:

$$f_Y(y) = 2f_{g^{(k)}}(y)F_{g_{q(y)}}(\lambda^T(y - \mu)) \quad (15)$$

dove  $f_{g^{(k)}}(\cdot)$  è la funzione di distribuzione della  $El_k(\mu, \Omega; g^{(k)})$  e  $F_{g_{q(x)}}$  è la funzione di densità di  $El_k(0, 1; g_{q(z)})$ , con

$$\lambda^T = \frac{\delta^T \Omega^{-1}}{(1 - \delta^T \Omega^{-1} \delta)^{1/2}}, \quad (16)$$

$$g^{(k)}(u) = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty g^{(k+1)}(r^2 + u)r^{k-1} dr, \quad u \leq 0 \quad (17)$$

$$g_{q(y)}(u) = \frac{g^{(k+1)}(u + q(y))}{g^{(k)}(q(y))}, \quad (18)$$

e  $q(y) = (y - \mu)^T \Omega^{-1} (y - \mu)$ . In questo caso, denotiamo  $Y \sim SE_k(\mu, \Omega, \delta; g^{(k+1)})$ , dove  $g^{(k+1)}$  è la funzione generatrice data in (17) con  $k$  sostituito da  $(k+1)$ . Dalla (16) e dal determinante positivo della matrice  $\Sigma$ , segue che  $\delta$  e  $\Omega$  devono soddisfare la condizione  $\delta^T \Omega^{-1} \delta < 1$ .

Quindi

$$f_Y(y) = 2 |\Omega|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\lambda^T(y - \mu)} g^{(k+1)}(r^2 + (y - \mu)^T \Omega^{-1} (y - \mu)) dr. \quad (19)$$



---

## Casi speciali

### Caso A: distribuzione $t$ asimmetrica

La funzione generatrice è data da

$$g_{\nu,\tau}(u) = C(\nu, \tau)[\tau + u]^{-(\nu+k+1)/2}.$$

Così, la funzione di distribuzione della  $t$  asimmetrica multivariata è

$$f_Y(y) = 2f_{\nu,\tau}(y; \mu, \Omega)F_{\nu^*,\tau^*}(\lambda^T(y - \mu))$$

dove  $f_{\nu,\tau}(\cdot; \mu, \Omega)$  è la funzione di distribuzione di una generalizzata distribuzione  $t$  di Student  $k$ -variabili con posizione e parametri scalari  $\mu$  e  $\Omega$ , rispettivamente, e  $F_{\nu^*,\tau^*}(\cdot)$  è la funzione di distribuzione di una generalizzata distribuzione  $t$  standard univariata.

### Caso B: distribuzione asimmetrica di Cauchy

Siano  $W = (W_1, W_2, \dots, W_k), U$   $k + 1$  variabili standardizzate di Cauchy indipendenti. Consideriamo la distribuzione condizionata di  $W$  dato  $\lambda'_1 W > U$ . Questa distribuzione è chiamata distribuzione fondamentale asimmetrica di Cauchy.

Per determinare la densità della distribuzione ragioniamo come segue. Per semplicità introduciamo l'evento

$$A(\lambda_1) = \{\lambda'_1 W > U\} = \{(W, U) \in B(\lambda_1)\},$$

dove

$$B(\lambda_1) = \{(w, u) : \lambda'_1 w > u\}.$$

La densità condizionata di  $(W, U)$  dato  $A(\lambda_1)$  è data da

$$f_{W,U|A(\lambda_1)}(w, u) = \frac{\prod_{i=1}^k \phi(w_i) \phi(u) I((w, u) \in B(\lambda_1))}{P(A(\lambda_1))}. \quad (20)$$

---

Ora integriamo la (20) rispetto ad  $u$  ed otteniamo la densità desiderata

$$f_{W|A(\lambda_1)}(w) = \frac{[\prod_{i=1}^k \phi(w_i)] \Phi(\lambda'_1 w)}{P(A(\lambda_1))}. \quad (21)$$

Tuttavia, il denominatore non è difficile da valutare. Abbiamo

$$P(A(\lambda_1)) = P(\lambda'_1 W > U) = P(U - \lambda'_1 W < 0).$$

In questo caso,  $\lambda'_1 W - U$  ha una distribuzione simmetrica.

Quindi il denominatore in (21) si riduce ad  $\frac{1}{2}$ . Allora

$$f(w; \lambda_1) = 2[\prod_{i=1}^k \phi(w_i)] \Phi(\lambda'_1 w) \quad (22)$$