

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

presentata da

Verbana Nori

RIDUZIONE ANALITICA  
DEI DIFFEOMORFISMI DEL CERCHIO A UNA  
ROTAZIONE

Relatore

Prof. Guido Gentile

ANNO ACCADEMICO 2002-2003

Ottobre 2003

Classificazione AMS: 37E10, 37C15, 37C55, 37J40

Parole Chiave: Diffeomorfismi del cerchio, rotazione, coniugazione analitica.

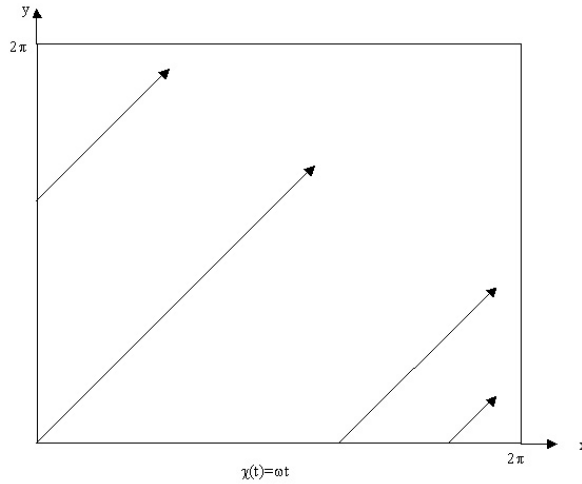
Per studiare un qualsiasi problema pratico è fondamentale la scelta del modello con cui lo si vuole descrivere matematicamente. Ad esempio se si desidera studiare un problema di evoluzione rappresentandolo come un particolare sistema dinamico può succedere che anche sistemi molto semplici possano avere dei comportamenti complicati e dipendere in maniera rilevante non solo dalle condizioni iniziali ma anche da piccole variazioni del modello fisico stesso. Quindi, se si desidera utilizzare un modello che dia informazioni sul problema che si sta studiando, la necessità di selezionare le proprietà di tale modello, in modo che queste siano poco sensibili a deboli variazioni del modello stesso, è evidente.

Lo studio dei diffeomorfismi del cerchio da parte di illustri matematici come Arnold, Moser e Herman si inserisce nell'ambito della *teoria KAM* che studia, grossomodo, cosa succede quando si perturba un *sistema integrabile*. Se si considerano sistemi Hamiltoniani, cioè sistemi in cui l'evoluzione temporale è descritta da equazioni che si possono derivare da un'unica funzione  $H$ , chiamata *Hamiltoniana*, che rimane costante nel tempo, diremo che un sistema è *integrabile*, se, in opportune variabili  $(J, \chi) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , dette variabili *azione-angolo*, le equazioni di Hamilton assumono la forma

$$\begin{aligned} \dot{J} &= 0, \\ \dot{\chi} &= \frac{\partial H(J)}{\partial J}; \end{aligned} \tag{1}$$

lo *spazio delle fasi*, cioè lo spazio in cui evolvono le coordinate che descrivono il sistema, risulta allora costituito da *tori invarianti*. Il termine *tori* sta ad indicare che il moto si svolge su superfici che possono essere parametrizzate da angoli, mentre l'aggettivo *invariante* significa che partendo da queste superfici ci si resta indefinitamente.

Considerando, in particolare, il caso bidimensionale, una possibile traiettoria  $\chi(t)$  (con dato iniziale  $\chi_0 = 0$ ) sul toro  $\mathbb{T}_{J_0} = \{(J_0, \chi) \mid \chi \in \mathbb{T}^2\}$  può essere rappresentata come in figura 1.1 .



**Figura 1.1:** *flusso lineare su  $\mathbb{T}^2$*

Ci si può chiedere cosa succede se si aggiunge una perturbazione al campo vettoriale. Se una qualsiasi perturbazione, piccola a piacere, alterasse completamente il comportamento del sistema, ovviamente perderebbe di molto interesse lo studio dei sistemi integrabili non è infatti possibile che un problema fisico reale, in cui intervengono i più svariati fattori e l'azione di agenti esterni perturbatori non si può trascurare, sia descrivibile come un sistema integrabile. Si è a lungo pensato che bastasse una piccola perturbazione per rendere il sistema caotico e che quindi i sistemi integrabili fossero un caso eccezionale nel panorama dei possibili sistemi dinamici. In realtà non è questo il caso. Quello che succede, invece, è che molti dei tori invarianti vengono semplicemente un po' deformati dalla perturbazione. Questo risultato, noto come Teorema KAM è uno dei maggiori risultati nell'ambito della teoria dei sistemi dinamici.

Un mezzo investigativo molto potente per studiare le traiettorie  $\chi(t)$  sul toro e che indirizza lo studio verso i diffeomorfismi del cerchio è l'*applicazione*

di Poincaré. Tenendo presente che i valori delle variabili d'azione si mantengono costanti lungo il moto, si fissa una sezione del toro, ad esempio  $\chi_1 = \pi$  (o qualsiasi altro valore) e si considerano i valori della variabile  $\chi_2$  quanto  $\chi_1(t) = \pi$  cioè si individuano i punti in cui la traiettoria  $\chi(t)$  attraversa la sezione fissata. Se  $t_1 > 0$  è il tempo del primo attraversamento,  $t_2 > t_1$  è il primo tempo successivo a  $t_1$  in cui la traiettoria interseca nuovamente la sezione, e così via, si riesce a creare una successione di punti  $x_1 = \chi_1(t_1)$ ,  $x_2 = \chi_2(t_2)$ ,  $x_3 = \chi_3(t_3) \dots$ . Si può, allora, considerare l'applicazione  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$  che è appunto un diffeomorfismo del cerchio, cioè un'applicazione regolare definita modulo  $2\pi$ , la cui forma esplicita è

$$x_i \rightarrow x_{i+1} = x_i + 2\pi\mu \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$$

per qualche  $\mu \in [0, 1]$ .

Arnold, Moser e molti altri matematici tra cui potremo ricordare Herman hanno cercato di rispondere alla seguente domanda *'cosa succede se si introduce una perturbazione, cioè se si considera un diffeomorfismo del cerchio della forma'*

$$x_i \rightarrow x_{i+1} = x_i + 2\pi\mu + \varepsilon F(x_i) \quad ? \quad (2)$$

Ovviamente, il sistema dinamico che si ottiene costituisce un modello semplificato rispetto a quello che si otterrebbe come sezione di Poincaré di una perturbazione di (1); infatti, in tal caso, anche se il toro sopravvive i valori delle azioni non saranno più costanti nel tempo e quindi non è possibile descrivere il sistema in termini delle sole variabili  $\chi$ . Tuttavia è comunque interessante studiare il comportamento di sistemi definiti dall'applicazione (2) in quanto esso presenta tutte le caratteristiche essenziali del problema hamiltoniano e, nel contempo, dato il suo aspetto 'più semplice', consente una trattazione matematica in cui si possono evitare inutili problemi tecnici. Nel 1976 H.Herman dimostrò che *per quasi ogni numero di rotazione  $\mu$  un diffeomorfismo del cerchio, di classe almeno  $C^3$ , e con numero di rotazione*

$\mu$  è differenziabilmente equivalente a una rotazione di un angolo  $2\pi\mu$ .

Precedentemente, Moser nel 1962 aveva provato che in una famiglia di diffeomorfismi differenziabile un numero sufficiente di volte  $A_{\mu,\varepsilon} : y \rightarrow y + \mu + \varepsilon F(y)$  la frazione dell'insieme delle coppie  $(\mu, \varepsilon)$  nel dominio  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , tali che il diffeomorfismo  $A_{\mu,\varepsilon}$ , non si riduca a una rotazione con un diffeomorfismo differenziabile, tende a zero con  $\varepsilon_0$ .

Nel lavoro di Moser si richiede una maggiore regolarità delle perturbazioni: quindi il lavoro di Herman costituisce un' elegante estensione dei risultati di Moser.

Lo scopo di questa tesi sarà quello di presentare un procedimento di dimostrazione per teoremi di questo genere nel caso di un diffeomorfismo analitico. Seguendo l'approccio proposto da Arnold nel 1961 mostreremo che un'applicazione analitica della circonferenza che differisce poco da una rotazione, il cui numero di rotazione è irrazionale e soddisfa particolari requisiti aritmetici, può essere ridotta a una rotazione attraverso un cambio di variabili analitico. Cioè, indicando con  $R$  la rotazione di un angolo  $2\pi\mu$

$$R : z \rightarrow z + 2\pi\mu$$

e con  $R_\varepsilon$  una sua perturbazione di ordine  $\varepsilon$

$$R_\varepsilon : z \rightarrow z + 2\pi\mu + \varepsilon F(z) \tag{3}$$

che abbia lo stesso numero di rotazione di  $R$ , proveremo che esiste un'applicazione analitica  $\varphi = \varphi(z, \varepsilon)$ , che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{R_\varepsilon} & S^1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \xrightarrow{R} & S^1 \end{array} \tag{4}$$

e cioè che verifica

$$\varphi(R_\varepsilon(z), \varepsilon) = R(\varphi(z, \varepsilon)) = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu . \tag{5}$$

Prima di affrontare le problematiche riguardanti la ricerca della soluzione dell'equazione (5) vedremo se il problema è ben posto: non è infatti ovvio quali condizioni la funzione  $F(z)$  debba soddisfare perché un diffeomorfismo della forma (3) abbia numero di rotazione  $2\pi\mu$ .

La tecnica che ci permetterà di risolvere questi problemi si basa sull'osservazione che partendo dall'applicazione (3) è possibile scegliere  $\Delta = \Delta(\varepsilon)$  in modo che l'applicazione

$$A_1 : z \rightarrow z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z) \quad (6)$$

abbia numero di rotazione  $2\pi\mu$  e mira a dimostrare che per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo e  $\mu$  che verifica opportune condizioni aritmetiche si ha

1.  $\Delta(\varepsilon)$  dipende analiticamente da  $\varepsilon$ ;
2. la trasformazione

$$A_1 : z \rightarrow z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z) \quad (7)$$

può essere ridotta a una rotazione di un angolo  $2\pi\mu$  attraverso un cambiamento di variabili analitico:  $\varphi(z, \varepsilon) = z + g(z, \varepsilon)$ .

Concentreremo quindi la nostra attenzione sulla proprietà 2 che afferma l'esistenza della funzione  $\varphi$  che, per un'opportuna scelta di  $\Delta$ , rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{A_1} & S^1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \xrightarrow{R} & S^1 \end{array} \quad (8)$$

e cioè che verifica

$$\varphi [A_1(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, ] = R[\varphi(z, \varepsilon)]$$

la quale, indicando con  $z = z(\varphi, \varepsilon)$  la funzione inversa di  $\varphi = \varphi(z, \varepsilon)$ , può essere scritta come

$$A_1 [z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta] = z[\varphi + 2\pi\mu, \varepsilon].$$

Seguendo l'approccio proposto da Arnold nel 61 [Arn61] costruiremo una successione di cambi di variabile  $\varphi_n$  ciascuno dei quali avrà la proprietà di coniugare analiticamente un'applicazione  $B_m$ , del tipo (7), che differisce da una rotazione per termini di ordine  $\varepsilon^m$  ad una applicazione che differisce dalla medesima rotazione per termini di ordine  $\varepsilon^{2m}$ ; analogamente, costruiremo una successione  $\Delta_n$  i cui elementi serviranno per eliminare, ad ogni passo, la media della perturbazione.

Scegliendo dunque, opportunamente

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_1'(\Delta_2, \varepsilon) + \Delta_1''(\Delta_3, \Delta_2, \varepsilon) + \dots$$

riusciremo a costruire la seguente successione di diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{A} & S^1 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_1 \\
 S^1 & \xrightarrow{A_1} & S^1 \\
 \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_2 \\
 S^1 & \xrightarrow{A_2} & S^1 \\
 \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_3 \\
 S^1 & \xrightarrow{A_3} & S^1 \\
 \vdots & \dots & \vdots \\
 \\
 \vdots & \dots & \vdots \\
 S^1 & \xrightarrow{A_{n-2}} & S^1 \\
 \downarrow \varphi_{n-1} & & \downarrow \varphi_{n-1} \\
 S^1 & \xrightarrow{A_{n-1}} & S^1 \\
 \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n \\
 S^1 & \xrightarrow{A_n} & S^1
 \end{array} \tag{9}$$

in cui il passo  $m$ -esimo, e quindi l'applicazione  $\varphi_m = \varphi_m(\varphi_{m-1}, \varepsilon)$ , avrà la proprietà di coniugare analiticamente l'applicazione

$$A_m : \quad \varphi_{m-1} \longrightarrow \varphi_{m-1} + 2\pi\mu + \Delta_m(\varepsilon) + \Delta'_m(\Delta_{m+1}, \varepsilon) + \\ \Delta''_m(\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \varepsilon) + \dots + F_m(\varphi_{m-1}, \varepsilon),$$

dove  $\Delta_m(\varepsilon)$  elimina la media della perturbazione  $F_m(\varphi_{m-1}, \varepsilon)$ , all'applicazione

$$A_{m+1} : \quad \varphi_m \longrightarrow \varphi_m + 2\pi\mu + \Delta_{m+1}(\varepsilon) + \Delta'_{m+1}(\Delta_{m+2}, \varepsilon) + \\ \Delta''_{m+1}(\Delta_{m+2}, \Delta_{m+3}, \varepsilon) + \dots + F_{m+1}(\varphi_m, \varepsilon)$$

dove  $\Delta_{m+1}(\varepsilon)$  elimina la media della perturbazione  $F_{m+1}(\varphi_m, \varepsilon)$ .

In questo modo le funzioni

$$z^{(N)}(\varphi_N, \varepsilon) = z [z_1 (\dots z_{N-1}(\varphi_N, \varepsilon) \dots, \varepsilon)],$$

$$\Delta^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon) = \Delta [\Delta_1 (\dots \Delta_{N-1}(\Delta_N, \varepsilon) \dots, \varepsilon)]$$

saranno tali che

$$A_1 [z^{(N)}(\varphi_N, \varepsilon), \varepsilon, \Delta^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon)] = z^{(N)} [\varphi_N + 2\pi\mu + \Delta_N + F_N(\varphi_{N-1}, \varepsilon), \varepsilon]$$

dove  $F_N(\varphi_{N-1}, \varepsilon) \sim \varepsilon^{2^N}$ .

Dimostrando infine che le successioni  $z^{(N)}(\varphi_N, \varepsilon)$ ,  $\Delta^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon)$  ammettono limite per  $N \rightarrow \infty$  ed indicando tali limiti con  $\Delta(\varepsilon)$ ,  $z(\varphi, \varepsilon)$  otterremo appunto che

$$A_1 [z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\varepsilon)] = z [\varphi + 2\pi\mu, \varepsilon].$$

Vedremo, infine, come la commutatività del diagramma (4) discenda da questi risultati.

Descriviamo, in dettaglio, il lavoro svolto in ogni capitolo.



## Primo capitolo

Nel primo capitolo abbiamo affrontato il problema dell'approssimazione di numeri irrazionali con numeri razionali, riportando la dimostrazione del *Teorema di Dirichlet* [HW79] e di un suo corollario che afferma, nel caso in cui  $\alpha$  è irrazionale, l'esistenza di infinite coppie di interi relativamente primi che soddisfano la relazione

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

e quindi che un numero irrazionale  $\alpha$  ammette approssimazioni razionali con un errore 'piccolo a piacere'. La conoscenza di questo risultato sarà utilizzata per affrontare il problema dei piccoli denominatori che emergerà, nel secondo capitolo, dallo studio dell'equazione omologica.

Abbiamo, poi, introdotto le *funzioni analitiche* in quanto rappresentano la classe delle funzioni con cui lavoreremo e tra la varie proprietà che caratterizzano questa classe di funzioni abbiamo riportato in particolare alcune stime riguardanti i coefficienti di Fourier.

## Secondo capitolo

Il secondo capitolo come anticipato è dedicato allo studio dell'*equazione omologica*  $g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z)$ . Risolvere tale equazione è un passo fondamentale per la dimostrazione del risultato a cui la tesi è dedicata; rappresenta, infatti, l'approssimazione di ordine più basso per l'equazione funzionale che la funzione coniugatrice, se esiste, deve soddisfare.

Abbiamo affrontato, prima di tutto, il problema dell'unicità della soluzione dimostrando che, se  $\mu$  è razionale la soluzione di tale equazione è definita a meno di una arbitraria funzione di periodo  $\frac{2\pi}{n}$ ; mentre se  $\mu$  è irrazionale la soluzione è unica. Successivamente abbiamo ricercato la soluzione dell'equazione omologica all'interno della classe delle funzioni sviluppabili in

serie di Fourier e questo ci ha permesso di evidenziare il *problema dei piccoli denominatori*, infatti sviluppando  $f(z)$  e  $g(z)$  in serie di Fourier si trova

$$g(z) = \sum_{n \neq 0} g_n e^{inz}, \quad \text{con} \quad g_n = \frac{f_n}{e^{2\pi i \mu n} - 1}$$

e poiché, in base al teorema di Dirichlet,  $\mu$  ammette approssimazioni razionali  $\frac{m}{n}$  con un errore ‘piccolo a piacere’ allora la quantità  $e^{2\pi i \mu n} - 1$  potrebbe diventare arbitrariamente piccola e rappresentare un problema per la convergenza della serie. In realtà abbiamo, però, mostrato che questo non accade provando che, fissato  $\varepsilon > 0$ , quasi ogni  $\mu \in [0, 1]$  verifica, per qualche  $K > 0$ , la relazione diofantea

$$|\mu n - m| \geq \frac{K}{n^{1+\varepsilon}}$$

e che per tali  $\mu$ , definiti numeri diofantei di costante  $K$  ed esponente  $\varepsilon$ , si ha

$$|e^{2\pi i \mu n} - 1| \geq \frac{K}{C |n|^{1+\varepsilon}}.$$

Abbiamo, infine, provato che se  $\mu$  verifica una condizione diofantea e  $f(z)$  è una funzione analitica a media nulla allora l’equazione omologica  $g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z)$  ammette una soluzione analitica.

Questo capitolo e, in generale, la parte dedicata ai prerequisiti, è stata conclusa dimostrando due risultati di carattere analitico che saranno ampiamente utilizzati in tutto il resto della tesi.

## Terzo capitolo

Il terzo capitolo ha un duplice scopo: il primo è quello di introdurre i *diffeomorfismi del cerchio*, cioè applicazioni regolari da  $S^1$  in se, dove  $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ , il secondo è quello di descrivere la tecnica che ci permetterà di dimostrare la

commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{R_\varepsilon} & S^1 \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
 S^1 & \xrightarrow{R} & S^1
 \end{array} \tag{10}$$

dove  $R(z) = z + 2\pi\mu$  e  $R_\varepsilon = z + 2\pi\mu + F(z, \varepsilon)$ , con  $F(z)$  analitica.

Come prima cosa, quindi, abbiamo dato la definizione di *diffeomorfismo del cerchio* e dimostrato che ad ogni diffeomorfismo del cerchio che conserva l'orientamento è associato un numero particolare definito *numero di rotazione*. Dopo di ch , attraverso delle considerazioni euristiche, sulle problematiche connesse con la dimostrazione della commutativit  del diagramma (10) abbiamo evidenziato la necessit  di dimostrare preliminarmente un risultato di carattere pi  generale, che abbiamo chiamato *Teorema Fondamentale*, e abbiamo descritto la tecnica con cui, nel quarto e nel quinto capitolo, questo risultato verr  dimostrato.

## Quarto capitolo

Per la dimostrazione del Teorema Fondamentale abbiamo bisogno di un lemma, chiamato appunto *Lemma Fondamentale*, che dimostreremo in questo capitolo. Tale lemma afferma che, data l'applicazione

$$A_0(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta),$$

che rappresenta una perturbazione analitica della rotazione, sotto opportune ipotesi di piccolezza della perturbazione  $F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$  e supponendo che  $\mu$  verifica una condizione diofantea   possibile scegliere  $\Delta = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$  in modo che l'applicazione  $A_0(z, \varepsilon, \Delta)$  possa essere coniugata analiticamente all'applicazione

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) \equiv \varphi + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$$

con  $F_1(\varphi, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$  molto più piccole di  $F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$ .

Detto altrimenti questo significa che, scegliendo opportunamente  $\Delta$ , esiste un' applicazione  $\varphi = \varphi(z, \varepsilon)$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{A_0} & S^1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \xrightarrow{A_1} & S^1 \end{array}$$

Precisamente, l'enunciato che abbiamo provato è il seguente

**Lemma 4.1.1.** *Siano assegnati una famiglia di trasformazioni analitiche della circonferenza, che dipendono analiticamente dai parametri  $\varepsilon, \Delta$ :*

$$z \rightarrow A_0(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$$

e i numeri  $R_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $K > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $C > 0$ ,  $0 < \Delta_0 < 1$  in modo che valgano le seguenti condizioni

1.  $F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$      $\Phi(z + 2\pi, \varepsilon, \Delta) = \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$ ;
2. per  $Im z = Im \varepsilon = Im \Delta = 0$  si ha  $Im F = Im \Phi = 0$ ;
3. per  $|Im z| \leq R_0$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ,  $|\Delta| \leq \Delta_0$  si ha  $|F(z, \varepsilon)| \leq C < \delta^8$ ,  
 $|\Phi(z, \varepsilon, \Delta)| < \delta |\Delta|$
4. il numero irrazionale  $\mu$  per ogni coppia di interi  $m, n$  soddisfa la dise-  
guaglianza  $|\mu - \frac{m}{n}| \geq \frac{K}{|n|^3}$
5. il numero  $\delta$  soddisfa le relazioni  $\delta < \frac{K}{64}$ ,  $\delta < \frac{R_0}{8}$ ,  $\delta < \frac{1}{36}$  e  $C < \frac{\Delta_0}{6}$ .

Allora esistono funzioni analitiche  $z(\varphi, \varepsilon)$ ,  $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ ,  $F_1(\varphi, \varepsilon)$   
 $\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$  tali che

1.

$$z[A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1, \cdot), \varepsilon] = A_0[z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)],$$

dove

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) \equiv \varphi + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$$

$$2. \quad F_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon) = F_1(\varphi, \varepsilon), \quad \Phi_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon, \Delta_1) = \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) \\ z(\varphi + 2\pi, \varepsilon) = z(\varphi, \varepsilon) + 2\pi.$$

$$3. \quad \text{per } \text{Im } \varphi = \text{Im } \Delta_1 = \text{Im } \varepsilon = 0 \text{ si ha } \text{Im } z = \text{Im } \Delta = \text{Im } F_1 = \\ \text{Im } \Phi_1 = 0$$

$$4. \quad \text{Per } |\Delta_1| \leq C, \quad |\text{Im } \varphi| \leq R_0 - 7\delta, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

$$|F_1(\varphi, \varepsilon)| \leq \frac{C^2}{\delta^6}, \\ |\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)| \leq \delta^2 |\Delta_1|, \\ |z(\varphi, \varepsilon) - \varphi| \leq \frac{C}{\delta^4}, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right| < 2, \\ |\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| \leq \Delta_0, \quad \left| \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1} \right| < 2.$$

Piccole perturbazioni di ordine  $C$  della rotazione possono essere, quindi, scritte, attraverso un opportuno cambio di variabili analitico, in modo che nel nuovo parametro la differenza da una rotazione sia di ordine  $C^2$ . Questo risultato giustifica la possibilità costruire l' $m$ -esimo diagramma commutativo in (9).

## Quinto capitolo

In questo capitolo abbiamo dimostrato il Teorema Fondamentale. Questo risultato afferma che sotto opportune ipotesi di piccolezza della perturbazione  $F(z, \varepsilon)$  e supponendo che  $\mu$  verifica una condizione diofantea è possibile scegliere  $\Delta$  in modo che l'applicazione

$$A(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon)$$

può essere coniugata analiticamente alla rotazione

$$R(z) \equiv z + 2\pi\mu$$

Cioè che, scegliendo opportunamente  $\Delta$ , esiste la funzione  $\varphi = \varphi(z, \varepsilon)$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{A} & S^1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^1 & \xrightarrow{R} & S^1 \end{array}$$

Precisamente, abbiamo provato il seguente risultato.

**Teorema 5.1.1.** *Sia data una famiglia di trasformazioni analitiche della circonferenza, che dipendono analiticamente da due parametri  $\varepsilon, \Delta$ ;*

$$z \rightarrow A(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) \quad (5.11)$$

e siano assegnati i numeri  $R > 0, \varepsilon_0 > 0, K > 0, L > 0$  tali che

1.  $F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$ ;
2. per  $Im z = Im \varepsilon = 0$  si ha  $Im F(z, \varepsilon) = 0$
3. per  $|Im z| \leq R, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$   $|F(z, \varepsilon)| \leq L|\varepsilon|$ ;
4. per tutti gli interi  $m, n$  il numero irrazionale  $\mu$  soddisfa la relazione

$$\left| \mu - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{K}{|n|^3}$$

Allora esistono i numeri  $\varepsilon'$  e  $R'$  con  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$  e  $0 < R' \leq R$  e le funzioni  $\Delta(\varepsilon), \varphi(z, \varepsilon)$  reali per  $\varepsilon$  e  $z$  reali e analitiche per  $|\varepsilon| < \varepsilon', |Im z| < R'$  tali che

$$\varphi[A(z, \varepsilon, \Delta(\varepsilon)), \varepsilon] = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu.$$

Questo risultato è stato dimostrato nel seguente modo: usando ripetutamente il *Lemma Fondamentale* abbiamo mostrato che ad ogni passo la perturbazione si riduce e abbiamo costruito la successione di diagrammi commutativi (9), dopo di che abbiamo verificato che la costruzione iterativa converge e che nel limite la perturbazione tende a zero per un'opportuna scelta di  $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ . È stato, in questo modo, provato che l'applicazione (5.11) è analiticamente equivalente a una rotazione e che la funzione coniugatrice si ottiene come composizione di infinite coniugazioni analitiche.

Abbiamo concluso la nostra tesi mostrando, grazie al seguente Corollario, che la commutatività del diagramma (10) è una conseguenza del Teorema Fondamentale.

**Corollario 5.2.1.** *Sia dato  $R > 0$ .*

*Sia  $\mu$  un numero irrazionale tale che per ogni coppia di interi  $m, n$  soddisfa la relazione*

$$\left| \mu - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{K}{|n|^3}$$

*per qualche  $K > 0$ .*

*Allora esiste una costante  $C = C(K, R)$  tale che se la trasformazione*

$$A : z \rightarrow z + 2\pi\mu + F(z)$$

*ha numero di rotazione  $2\pi\mu$  e per  $|Im z| \leq R$  si ha*

$$|f(z)| \leq C$$

*allora  $A$  può essere ridotta ad una rotazione di un angolo  $2\pi\mu$  attraverso un cambiamento di variabili analitico.*

# Bibliografia

- [Arn61] V. I. Arnol'd. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25:21–86, 1961.
- [Arn89] V. I. Arnold. *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali*, 1989.
- [Boo86] M. William Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, 1986.
- [Gal86] Giovanni Gallavotti. *Meccanica elementare*, 1986.
- [Giu89] Enrico Giusti. *Analisi matematica 2*. 1989.
- [HW79] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, fifth edition, 1979.
- [Kol54] A. N. Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 98:527–530, 1954.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.