Facoltà di Scienze Matematiche,

Fisiche e Naturali

Sintesi di tesi di Laurea in Matematica
presentata da Valentino Nocera

Strutture matematiche nell'Ara Pacis

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato
Valentino Nocera

Il Relatore
Andrea Bruno

Anno Accademico 2008-2009

Classificazione: O1A05, O1A20
Parole chiave: Fregi, Storia della matematica.

Questa tesi ha lo scopo di presentare uno studio approfondito sulle strutture matematiche presenti nel fregio floreale dell'*Ara Pacis*. Questo lavoro prende impulso dalla richiesta della *Prof.ssa Giulia Caneva*, professoressa di Botanica presso il Dipartimento di Biologia dell'Università Roma Tre, nell'ambito di un progetto nato contestualmente al *progetto Meier* per la nuova musealizzazione del monumento, a cura della Sovraintendenza ai Beni Culturali e dell'Ufficio Città Storica del Comune di Roma. Uno degli obiettivi principali dello studio della *Prof.ssa Caneva* è stato quello di analizzare il monumento dal punto di vista di un botanico, con l'obiettivo di individuare i significati simbolici delle immagini ivi presenti. Il risultato, che sarà possibile consultare nel libro in preparazione della stessa *Prof.ssa Caneva* (*Il Codice Botanico di Augusto*, Silvana Editoriale, Milano), è quello della presenza di un messaggio simbolico il quale rispetta però canoni armonici molto precisi; inoltre la struttura naturalistica risulta essere una imitazione fedelissima di centinaia di elementi vegetali reali. Nel corso del tempo sono stati molti gli studi effettuati sia sul fregio floreale che sull'intero monumento dell'Ara Pacis, volti ad una sua maggiore comprensione anche dal punto di vista storico e culturale, compresi tentativi di capire chi fossero gli autori materiali ed i progettisti dell'opera. Su quest'ultimo punto in particolare non c'è alcuna certezza, in quanto non era usanza degli antichi tramandare ai posteri l'identità degli autori di un monumento e quindi, come vedremo, è possibile fare solamente delle supposizioni. Ciò che mancava era uno studio del fregio floreale dal punto di vista matematico e questa tesi, come detto, si propone di colmare tale lacuna. L'opportunità di prendere parte a questo progetto si è presentata quando il *Prof. Michele Emmer* mi ha messo in contatto con la *Prof.ssa Caneva*. Successivamente è avvenuta una serie di incontri durante i quali vi sono stati numerosi scambi di idee e anche un sopralluogo al monumento. La *Prof.ssa Caneva*, quindi, mi ha messo a disposizione una grandissima quantità di materiale, tra cui anche tutte le immagini relative all'Ara Pacis presenti in questa tesi. Il lungo studio che ne è seguito mi ha permesso di giungere ai risultati che mi appresto a presentare.

La difficoltà principale è stata quella di capire quali potessero essere le conoscenze matematiche dei Romani nell'epoca in cui venne costruita l'Ara Pacis; in altre parole, il primo passo è stato raccogliere il maggior numero di informazioni allo scopo di chiarire quali strutture matematiche avesse senso ricercare nel fregio floreale. Questo lungo lavoro di lettura e confronto di testi è stato reso possibile anche grazie al contributo della *Prof.ssa Ana Millán Gasca*, la quale mi ha fornito una vasta bibliografia che è stata fondamentale per gli studi svolti.

Abbiamo diviso il lavoro in tre capitoli. Nel primo paragrafo del primo capitolo, dopo una serie di definizioni introduttive che caratterizzano le quattro isometrie del piano, si è giunti alla classificazione di esse tramite il *teorema di Chasles*. Nel secondo paragrafo si è ripreso tale discorso con la dimostrazione di importanti risultati che hanno permesso di effettuare una classificazione completa dei *gruppi di fregi*, uno dei tre tipi di gruppi discontinui di isometrie del piano euclideo E. Nel terzo paragrafo siamo invece passati a discutere della sezione aurea, dandone le principali definizioni e studiando le applicazioni più importanti; nell'ultimo paragrafo di questo capitolo, invece, abbiamo riportato alcune delle proposizioni e dimostrazioni presenti nel trattato originale delle *Coniche* di *Apollonio*.

Nel secondo capitolo abbiamo quindi effettuato uno studio sullo sviluppo della storia della scienza e della matematica in particolare, dagli antichi Greci fino agli ultimi anni del I secolo a.C., con uno sguardo attento ai personaggi che hanno permesso tale sviluppo. Questo lavoro ci ha permesso quindi di capire quali fossero le conoscenze matematiche all'epoca della costruzione dell'*Ara Pacis*, ultimata intorno al 9 a.C., così da effettuare uno studio mirato sul fregio florale.

Nel terzo capitolo abbiamo esposto tale studio. Aiutandoci con il software di matematica dinamica *GeoGebra*, abbiamo potuto osservare la presenza nel fregio di una certa quantità di aspetti associati alla sezione aurea, alle simmetrie e alle coniche. Nell'ultimo paragrafo, infine, abbiamo preso in esame un'opera pre-romana, il *Didymaion*, applicando ad essa i risultati ottenuti

per l'*Ara Pacis*.
Cominciamo quindi ad analizzare nel dettaglio il contenuto della tesi. I primi risultati importanti riguardano la definizione di isometria con alcune proprietà:

Definizione 0.1. *Sia E uno spazio euclideo su V. Un'affinità $f : E \to E$ si dice **isometria** di E se l'automorfismo associato $\varphi : V \to V$ è un operatore unitario.*

La composizione di due isometrie è un'isometria perchè l'automorfismo associato è unitario, essendo la composizione di due operatori unitari; analogamente l'inversa di un'isometria è ancora un'isometria. Indicheremo con $Isom(E)$ il **gruppo delle isometrie** di E.

Definizione 0.2. *Un'isometria f, con automorfismo associato φ, si dice **diretta** se $det(\varphi) = 1$, e **inversa** se $det(\varphi) = -1$.*

Le quattro isometrie del piano sono la **traslazione**, la **rotazione**, la **riflessione**, e la **glissoriflessione**. Il *teorema di Chasles* ci dice che le uniche isometrie di E sono uno dei quattro tipi descritti e ci dà una loro classificazione:

Teorema 0.1. ***(Chasles, 1831)***
Una isometria del piano euclideo E che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Una isometria di E che non fissa alcun punto è una traslazione oppure una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.

I gruppi discontinui di isometrie del piano euclideo E si suddividono in tre classi: i gruppi finiti, i cosiddetti *gruppi dei fregi*, ed i *gruppi cristallografici piani*; il nostro interesse si è concentrato in modo particolare sullo studio della seconda di queste classi, studio che abbiamo effettuato nel paragrafo seguente.
I *gruppi dei fregi* contengono traslazioni in una sola direzione; è rilevante il fatto che in tutte le civiltà, prima che si giungesse ad una loro classificazione

matematica, siano stati usati da artisti e architetti tutti e sette i gruppi di fregi. Il fatto che siano solamente sette ci viene dal seguente teorema che ci propone anche una classificazione di essi:

Teorema 0.2.
Esistono, a meno di equivalenza, sette possibili sottogruppi discreti di $Isom(E)$ tali che il sottogruppo delle traslazioni sia isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Si ottengono così i sette gruppi discreti di isometrie piane con $T \cong \mathbb{Z}$, che sono detti *gruppi di fregi*; nella **figura 1** è presente un disegno il cui gruppo di simmetria, immaginando di prolungarlo all'infinito, è il gruppo in questione. La notazione utilizzata per identificare tali gruppi è la notazione cristallografica, ovvero:

- il primo simbolo è sempre una **p**;
- il secondo può essere un **1** oppure una **m** e indica la presenza (**m**) oppure l'assenza (**1**) di una riflessione nella direzione ortogonale alla direzione di traslazione;
- il terzo simbolo può essere un **1**, una **m** o una **a** e indica la presenza di una riflessione (**m**), di una glissoriflessione (**a**) o di nessuna delle due (**1**) nella direzione parallela alla direzione di traslazione;
- l'ultimo simbolo può essere un **1** o un **2** e indica la presenza (**2**) o l'assenza (**1**) di una rotazione di π.

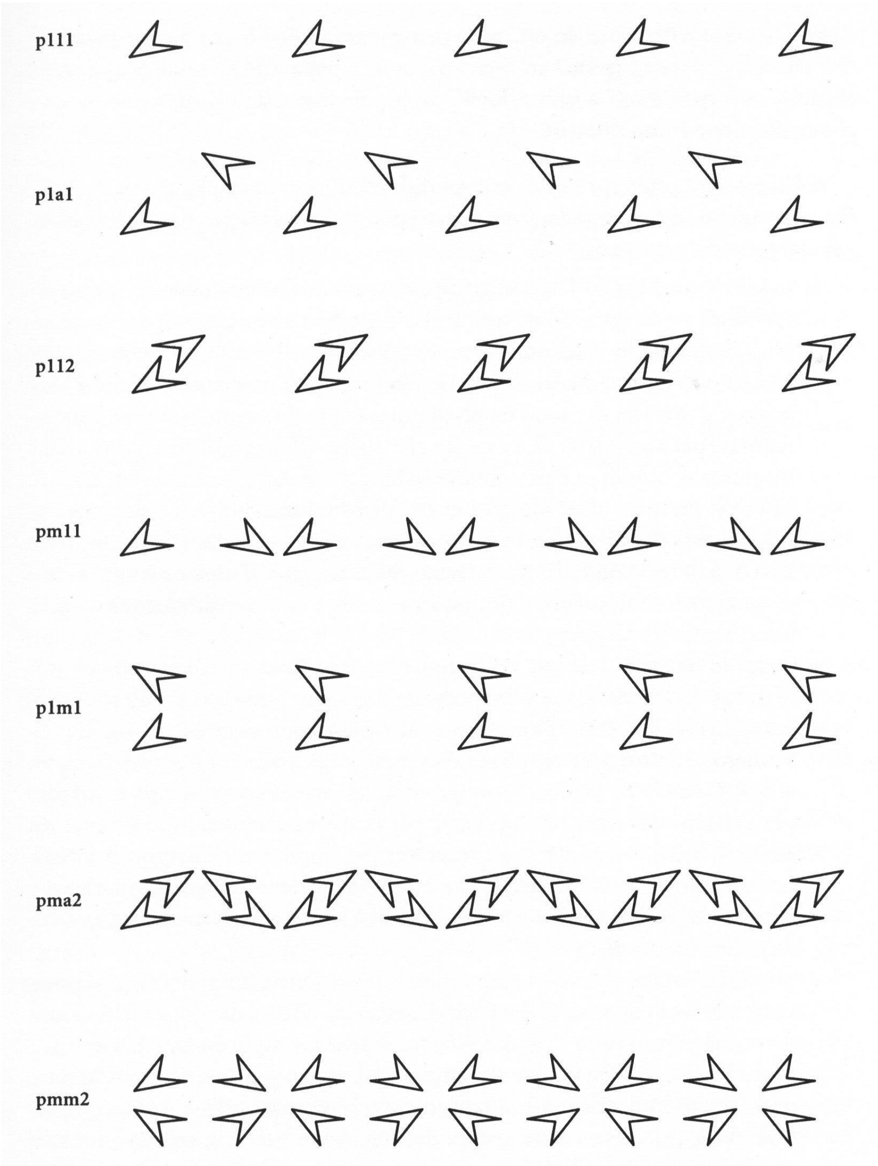

Figura 1

Nel terzo paragrafo, come accennato, ci siamo concentrati sulla definizione di *sezione aurea* e sulle sue applicazioni, in quanto essa è particolarmente presente nel fregio floreale dell'Ara Pacis.

Definizione 0.3. *Diremo che un segmento RS viene diviso nel* ***rapporto aureo*** *se, una volta disgiunto in due segmenti RP_1 e P_1S, il più grande di* *questi, RP_1, è in relazione con il più piccolo P_1S come l'intero segmento RS è in relazione con quello più grande RP_1* ***(Fig. 2)***.

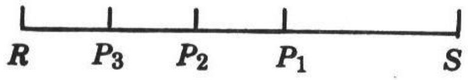

Figura 2

Se il segmento RS ha lunghezza 1 e il segmento più grande RP_1 ha lunghezza x, per la quanto detto si ha:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

x è la soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 = 1 - x$, la quale ha due soluzioni, ovvero:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.61803 \quad e \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.61803.$$

Poichè x deve essere positiva, il risultato da considerare sarà x_1 che indicheremo con ρ. Chiamiamo ora τ il reciproco di ρ; tale numero prende il nome di **sezione aurea** ed è dato da:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Consideriamo ora un rettangolo con lati di lunghezza 1 ed x e dividiamolo in un quadrato di lato x ed un rettangolo di lati x e $1-x$. Il rettangolo così ottenuto è *simile* a quello di partenza, e ciò comporta l'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Perciò i due rettangoli in questione sono entrambi **rettangoli aurei**. L'iterazione di questo procedimento produrrà una sequenza di quadrati che riempiranno completamente il rettangolo originale. Se disegniamo, in modo appropriato, quarti di circonferenza in ogni quadrato che divide il rettangolo aureo, otteniamo una curva che prende il nome di **spirale aurea**, in quanto costruita proprio all'interno di un rettangolo aureo **(Fig. 3)**.

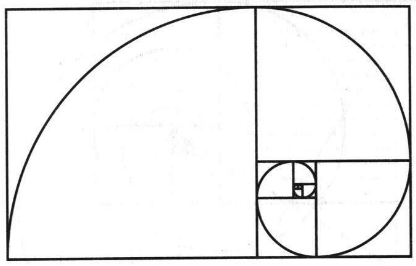

Figura 3

Dopo aver studiato la sezione aurea, la nostra attenzione si è concentrata su un'opera molto importante, scritta da *Apollonio* alla fine del III secolo a.C.: le *Coniche.* Tale trattato è composto da otto Libri, di cui solo sette sono giunti fino a noi. Come suggerisce il titolo, esso tratta delle sezioni coniche, sulle quali erano già stati scritti almeno due trattati; ma il manuale di Apollonio probabilmente rimpiazzò per importanza e completezza tali opere, e infatti è l'unico ad essere stato conservato. Nel Libro I egli introduce, al termine di altrettante proposizioni, i nomi delle tre coniche che ancora oggi utilizziamo, ovvero la 'parabola', l''iperbole', e l''ellisse':

Proposizione 0.1. *Se un cono è tagliato da un piano passante per l'asse e se è tagliato da un altro piano che taglia la base del cono secondo una retta perpendicolare alla base del triangolo passante per l'asse; se, in più, il diametro della sezione è parallelo ad uno dei lati del triangolo passante per l'asse, il quadrato di ciascuna sezione comune del piano secante e della base del cono, fino al diametro della sezione, equivale al rettangolo delimitato dalla retta che stacca sul diametro, dalla parte del vertice della sezione, e mediante una certa retta il cui rapporto alla retta situata tra l'angolo del cono e il vertice della sezione è lo stesso di quello del quadrato della base del triangolo passante per l'asse rispetto al rettangolo delimitato dai due lati restanti del triangolo. Noi chiameremo una tale sezione una 'parabola'.*

Proposizione 0.2. *Se un cono è intersecato da un piano passante per l'asse, e se è intersecato da un altro piano che interseca la base del cono secondo una retta perpendicolare alla base del triangolo passante per l'asse; se, inoltre, il* *diametro prolungato della sezione incontra uno dei due lati del triangolo per l'asse al di là del vertice del cono, il quadrato di retta condotta ad un punto della sezione, parallelamente alla sezione comune del piano secante e della base del cono, fino al diametro della sezione, sarà equivalente ad un'area applicata di seguito ad una certa retta, con la quale il rapporto della retta situata nel prolungamento del diametro della sezione, e che sottende l'angolo esterno del triangolo, è lo stesso del rapporto del quadrato della retta condotta dal vertice del cono parallelamente al diametro della sezione, fino alla base del triangolo, rispetto al rettangolo delimitato dai segmenti della base, determinata dalla retta condotta; area che ha come larghezza la retta staccata sul diametro da questa prima retta, dal lato del vertice della sezione, e aumentata di una figura che, simile al rettangolo delimitato dalla retta sottendente l'angolo esterno del triangolo, e dal parametro, è similmente posta. Chiameremo una tale sezione una 'iperbole'.*

Proposizione 0.3. *Se un cono è intersecato da un piano passante per l'asse, e se è pure intersecato da un altro piano che, incontrando ciascuno dei lati del triangolo passante per l'asse, non è posto né parallelamente, né antiparallelamente alla base del cono; se, inoltre il piano di base ed il piano secante si incontrano lungo una retta perpendicolare alla base del triangolo passante per l'asse, o perpendicolare al prolungamento di questa base, il quadrato di tutta la retta condotta dalla sezione del cono, parallelamente alla sezione comune dei piani, fino al diametro della sezione, sarà equivalente ad un'area applicata seguendo una certa retta, con la quale il rapporto del diametro della sezione è uguale al rapporto del quadrato della retta condotta, dal vertice del cono, parallelamente al diametro della sezione, fino alla base del triangolo, al rettangolo delimitato dalle rette che staccano quest'ultima retta sui lati del triangolo; area avente come larghezza la retta staccata sul diametro da questa prima retta, dalla parte del vertice della sezione, e diminuita di una figura simile al rettangolo delimitato dal diametro e dal parametro, e similmente posto. Chiamiamo tale sezione una 'ellisse'.*

Queste tre proposizioni, che nel Libro I sono rispettivamente la 11, la 12

e la 13, sono state tradotte cercando di mantenere il linguaggio dell'epoca; il risultato è un'esposizione complessa e poco chiara, soprattutto per la mancanza di una terminologia adeguata all'argomento.
Nel secondo capitolo, invece, abbiamo ampiamente esposto i risultati del lavoro svolto sui testi storici; abbiamo così definito la 'scienza', con *Lucio Russo*, come l'insieme di quelle teorie, chiamate scientifiche, che possiedono determinate caratteristiche:

- Le affermazioni 'scientifiche' non riguardano oggetti concreti, ma enti teorici specifici. Possiamo prendere come esempio la geometria euclidea: in essa vi sono affermazioni su angoli o segmenti, ma in natura non esistono 'angoli' e 'segmenti'.

- La teoria ha una struttura deduttiva; fornisce quindi metodi generali per risolvere un numero indeterminato di problemi. I metodi fondamentali sono la dimostrazione e il calcolo.

- Le applicazioni al mondo reale sono basate su 'regole di corrispondenza' tra gli enti della teoria e gli oggetti concreti. Tali regole, a differenza delle affermazioni interne alla teoria, non hanno alcuna garanzia assoluta; il metodo fondamentale per controllarne la validità è il metodo sperimentale.

Se questa è la definizione di 'scienza' che vogliamo considerare, possiamo certamente far coincidere la sua nascita con l'inizio dell'*ellenismo*, periodo storico-culturale successivo all'età della Grecia classica che si fa iniziare nel 323 a.C., data della morte di Alessandro Magno. La nascita della 'scienza' nel periodo ellenistico è dovuta probabilmente all'importante ruolo svolto dal nuovo tipo di relazioni instauratesi tra i Greci e le antiche civiltà egiziana e mesopotamica; in particolare, anche la 'scienza matematica' ha origine in tale periodo. E' chiaro, però, che la matematica ellenistica non compare dal nulla, ma possiede radici nell'antichità. Una prima fase, molto lunga, comprende la 'matematica' paleobabilonese e quella sviluppata nell'Egitto faraonico. In Mesopotamia sono state ritrovate le prime testimonianze ad oggi conosciute della scrittura: si tratta di tavolette di argilla con incisioni, che corrispondono alla lingua sumerica. La seconda fase, invece, consiste in un periodo di circa 250 anni, nel quale la Grecia classica assimila i risultati egiziani e mesopotamici sottoponendoli ad una critica razionale e ad un'indagine filosofica, fino a dar vita alla cosiddetta matematica ellenica. In questo periodo le figure principali sono quelle di *Talete* e di *Pitagora*, ai quali dobbiamo i primi progressi della matematica; è vero il fatto che entrambi sono figure storicamente piuttosto confuse in quanto non si è conservato alcun trattato matematico che possa essere attribuito all'uno o all'altro. Quel che è certo è che le più antiche testimonianze greche attribuiscono a Talete e a Pitagora un buon numero di scoperte matematiche; in particolare Talete viene definito il primo vero matematico, ovvero il fondatore dell'impostazione deduttiva della geometria. Gli vengono attribuiti vari risultati e le relative 'dimostrazioni'; essi formano una raccolta di elementi fondamentali per la geometria piana. A Pitagora, o meglio alla scuola dei Pitagorici, vengono attribuiti numerosi risultati; i membri di tale scuola, secondo Aristotele, furono 'i primi che fecero progredire la matematica'. E' probabile che essi conoscessero alcune proprietà del pentagono regolare; si pensa inoltre che la stella a cinque punte, formata tracciando le cinque diagonali della faccia pentagonale di un dodecaedro regolare **(Fig. 4)**, fosse proprio il simbolo della scuola pitagorica.

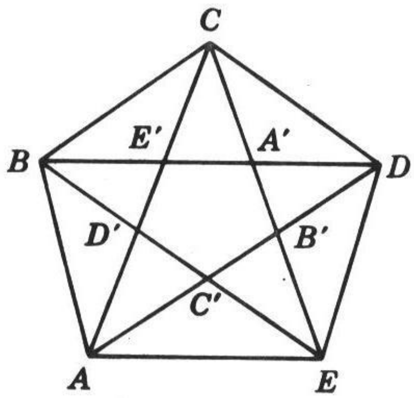

Figura 4

Proprio il procedimento per la costruzione del pentagramma in **figura 4** è uno degli aspetti più interessanti della geometria pitagorica. Prendiamo come punto di partenza un poligono regolare $ABCDE$ e tracciamo le cinque diagonali che si intersecano nei punti $A'B'C'D'E'$ i quali formano un altro pentagono regolare. E' possibile osservare che il triangolo BCD', ad esempio, è simile al triangolo isoscele BCE e che nella figura esistono anche coppie di triangoli congruenti. In ciascun caso un punto di intersezione delle diagonali divide una diagonale in due segmenti disuguali tali che il rapporto dell'intera diagonale e il segmento maggiore è uguale al rapporto fra questo segmento e il segmento minore; tale rapporto è il 'rapporto aureo' di un segmento, anche se a quel tempo non era conosciuto con questo nome. Ma per gli antichi Greci questo tipo di suddivisione diventò rapidamente molto comune e venne identificata con il termine 'sezione', che sostituì la denominazione più lunga 'la divisione di un segmento in media ed estrema ragione'. Notevole fu l'apporto dato alla matematica dai cosiddetti 'tre problemi classici dell'antichità', ovvero la 'quadratura del cerchio', la 'duplicazione del cubo' e la 'trisezione dell'angolo'. I tentativi di risolverli portarono alla scoperta di curve non costruibili con riga e compasso, come ad esempio la spirale di Archimede e la trisettrice di Ippia, oppure la cissoide di Diocle e la concoide di Nicomede. Ma il trattato più famoso del periodo ellenistico è stato scritto da un matematico attivo intorno al 300 a.C., *Euclide*, e prende il nome di *Elementi*. Sebbene ad Euclide non venga attribuita nessuna nuova scoperta, le sue capicità espositive gli procurarono grande fama; proprio questa caratteristica ha permesso il successo degli *Elementi*. Nel manuale, partendo da alcuni principi fondamentali e intuitivi, si deduce una grande quantità di risultati sempre più complessi, seguendo un metodo sistematico e assolutamente rigoroso dal punto di vista logico; tali principi sono esposti chiaramente all'inizio degli *Elementi*. Gli argomenti includono tutta la matematica cosiddetta 'elementare', ovvero l'aritmetica, la geometria sintetica e l'algebra, quest'ultima intesa non nel senso moderno dell'algebra simbolica, ma di un equivalente in termini geometrici. Dal manuale è esclusa l'arte del calcolo, che non faceva parte dell'educazione superiore, ma anche lo studio delle coniche e delle curve piane superiori, il quale costituiva una branca più avanzata della matematica. E' probabile che Euclide abbia utilizzato molte delle opere dei suoi predecessori, ed è altrettanto probabile che alcune dimostrazioni siano state sviluppate da lui stesso. Ogni Libro degli *Elementi*, in tutto tredici, è dedicato a un tema preciso enunciato all'inizio tramite l'introduzione di nuove definizioni. I primi quattro Libri sono dedicati alla geometria piana e in essi vengono enunciate e dimostrate le proprietà fondamentali delle figure rettilinee e dei cerchi. Il Libro I si apre con una serie di definizioni; questi concetti base sono poi utilizzati nel corso di tutta l'opera. Poi vengono enunciati cinque postulati e cinque nozioni comuni; subito dopo cominciano le 48 proposizioni, separate fra di loro dalle figure e ognuna costituita da un enunciato e una dimostrazione. Euclide presenta i postulati come proprietà geometriche che richiede di accettare come vere; ma per molti secoli solo i primi quattro sono stati considerati come verità evidenti riscontrabili nella realtà fisica. Il quinto postulato, invece, noto come 'postulato delle parallele', è stato sempre messo in dubbio dai matematici, nel senso che si è sempre cercato di eliminarlo o di dedurlo dagli altri quattro. Ma nel XIX secolo, la scoperta che Euclide avesse ragione nel considerarlo come un postulato, fece capire la possibilità di costruire altre geometrie diverse da quella euclidea. Il Libro si chiude con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo reciproco; tale dimostrazione è diversa da quella che troviamo nei manuali attuali, e sembra fosse originale di Euclide. I due Libri successivi sono anch'essi molto importanti: il Libro V si occupa della teoria generale delle proporzioni e tratta questioni di importanza fondamentale per la matematica. Euclide utilizza tale teoria nel Libro VI per dimostrare teoremi riguardanti rapporti e proporzioni relativi a triangoli, parallelogrammi o altri poligoni simili. I Libri VII, VIII e IX sono dedicati all'aritmetica, intesa nel senso teorico concepito dai Greci. In essi non viene riportato neanche un numero, nonostante si parli delle proprietà dei numeri stessi; non ci sono formule e le uguaglianze sono indicate a parole; l'attenzione si concentra principalmente sulla divisibilità e sulla proporzionalità. Il termine 'numero', comunque, si riferisce sempre a quelli che noi indichiamo come interi positivi. Nel Libro X si parla del grande problema delle grandezze geometriche incommensurabili tra di loro, cioè di quelle grandezze il cui rapporto non è un numero razionale. Negli ultimi tre Libri, infine, si studiano le proprietà delle figure nello spazio. Gli *Elementi* furono utilizzati da tutte le generazioni successive, e quindi influenzarono il corso della matematica più di qualunque altro libro; in quest'opera, inoltre, viene messa a disposizione una serie di strumenti per continuare lo sviluppo della matematica stessa.

L'ultimo personaggio che abbiamo preso in considerazione è stato Apollonio, del quale abbiamo analizzato il quadro storico e completato il discorso relativo ai risultati da lui ottenuti. Purtroppo molte opere attribuitegli sono andate perdute, ma dai racconti di storici successivi, sappiamo che era a conoscenza di numerose proprietà delle curve; in particolare, sembra sapesse come determinare una conica mediante cinque punti. Questo aspetto è molto significativo in quanto lo ritroveremo durante lo studio del fregio floreale dell'Ara Pacis.

Dal 212 a.C. in poi, ovvero dal saccheggio di Siracusa e l'uccisione di Archimede, i principali centri dell'ellenismo furono conquistati dai Romani. Nel corso del II secolo a.C. gli studi scientifici subirono un rapido decadimento, accentuatosi con la fine dell'ellenismo, che viene fatta di solito coincidere con l'annessione dell'Egitto da parte di Roma, avvenuta nel 30 a.C., che completò l'unificazione sotto il dominio romano di tutto il Mediterraneo e aprì le porte al cosiddetto *periodo imperiale*. *Ottaviano*, che assunse poi il titolo di *Augusto*, fu considerato il fondatore di uno stato costruito su nuove basi e il 'salvatore' dalle guerre civili. Nell'arte, l'umanesimo augusteo si è espresso con la costruzione del monumento della Pace, l'*Ara Pacis*, che assunse un'importanza notevole, non solo dal punto di vista artistico, ma anche storico e religioso. L'Ara Pacis fu votata dal Senato nel 13 a.C. per celebrare il ritorno di Augusto a Roma dalle vittoriose campagne militari in Spagna e Gallia, ma fu dedicata più tardi, il 30 gennaio del 9 a.C., giorno del compleanno della moglie Livia, nel Campo Marzio lungo il percorso della

via Lata. Gli intellettuali greci finirono alle corti degli aristocratici romani e influirono, direttamente o indirettamente tramite gli scritti dei loro antenati, allo sviluppo culturale romano.
Le argomentazioni proposte in questo capitolo ci hanno portato alla conclusione che nella costruzione dell'Ara Pacis, con ogni probabilità, sono intervenute diverse culture che hanno influito su alcune caratteristiche; gli studi condotti su di essa, discussi ampiamente nel terzo capitolo, hanno mostrato infatti la presenza di scoperte effettuate dai matematici greci. Tale capitolo si apre con una descrizione del monumento, il quale è costituito da un recinto esterno formato da blocchi di marmo di Carrara a forma parallelepipeda. La decorazione esterna del recinto è formata da due fregi scolpiti a bassorilievo delimitati da una fascia a meandri; quello inferiore è decorato da motivi vegetali, un viluppo di girali d'acanto; su quello superiore dei lati nord e sud è raffigurata una processione. Le fronti est ed ovest, ai lati delle porte di accesso, presentano una struttura molto simile; nella parte superiore vi sono quattro pannelli con raffigurazioni simboliche; nella parte inferiore troviamo un motivo vegetale molto simile a quello presente nei lati lunghi, anche se di dimensioni ridotte. Nei paragrafi successivi si analizza nel dettaglio il monumento; inizialmente troviamo una struttura principale formata da sei spirali, struttura che ci ha permesso di scoprire uno degli aspetti più interessanti che sono emersi dal nostro lavoro. Utilizzando *GeoGebra* è possibile disegnare una conica passante per cinque dei sei punti che identificano i centri delle spirali in questione; fatto ciò si nota una proprietà molto particolare: il sesto punto, infatti, appartiene anch'esso alla conica data **(Fig. 5)**. Questo si verifica solamente in due occasioni per ogni metà dei lati lunghi.

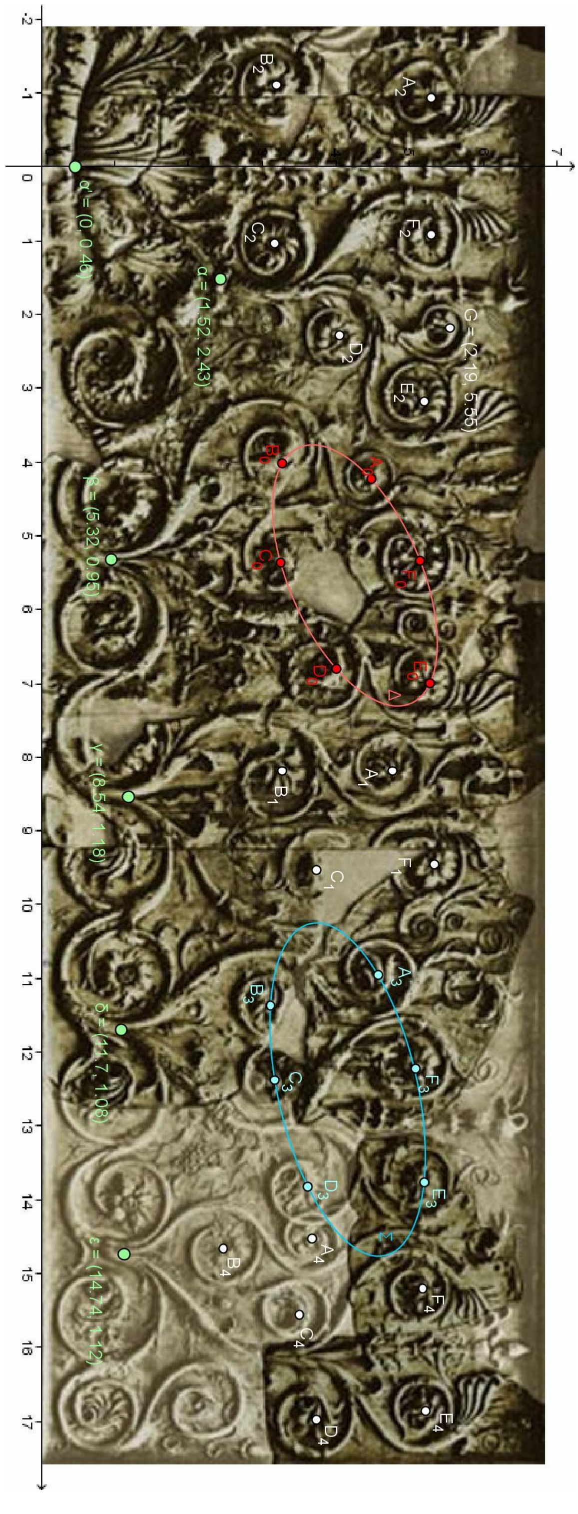

Figura 5

Abbiamo inoltre analizzato le possibili simmetrie nel fregio, studiando il lato lungo e quello corto restaurato e le immagini relative ai lati lunghi Nord e Sud che riportano solamente i reperti originali. Il risultato è stato quello di rilevare la presenza di una simmetria bilaterale sia nei lati lunghi che in quelli corti, con asse di riflessione verticale e approssimativamente sovrapposto allo stelo centrale. In generale, infatti, il miglior posizionamento dell'asse viene discusso caso per caso in modo tale da avere il maggior numero di elementi simmetrici possibile. Un esempio di come abbiamo lavorato è visibile nella **figura 6**, dove consideriamo un lato corto restaurato. Gli elementi individuati dai punti $A = (-5.42, 11.4)$ e $B = (-3.7, 11.48)$, comportano una rottura della simmetria, in quanto i loro simmetrici sono gli elementi identificati rispettivamente dai punti $A'' = (5.14, 11.36)$ e $B'' = (3.5, 11.44)$ e non quelli determinati da A' e B', simmetrici di A e B.

Figura 6

La sezione aurea è presente nell'Ara Pacis in diversi casi. Osservando l'immagine del lato lungo notiamo che nella parte superiore sono presenti sei cigni, tre per ciascuna metà, individuati dai punti B, E e C **(Fig. 8)**. Se consideriamo il segmento BC, lo dividiamo nei segmenti BE ed EC e ne calcoliamo le rispettive lunghezze che sono $\overline{BC} = \overline{AD} = 9.4$, $\overline{BE} = 3.58$ ed $\overline{EC} = 5.82$, otteniamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}} \approx \tau.$$

Ma è possibile notare anche un altro aspetto. Infatti, se disegniamo il rettangolo $ABCD$, otteniamo che il rapporto tra il lato maggiore BC ed il lato minore AB, la cui lunghezza è $\overline{AB} = \overline{CD} = 5.76$, ovvero tra la distanza che intercorre tra i cigni più lontani e l'altezza del fregio, è aureo.

Ma rettangoli di questo tipo sono presenti anche all'interno della decorazione; infatti la maggior parte delle spirali presenti nel fregio, sia nei lati lunghi che in quelli corti, possono essere inscritte in un rettangolo aureo. Tali spirali non sono però auree, in quanto non soddisfano le proprietà viste nel primo capitolo relative a questo tipo di curve (esempi nella **figura 7**).

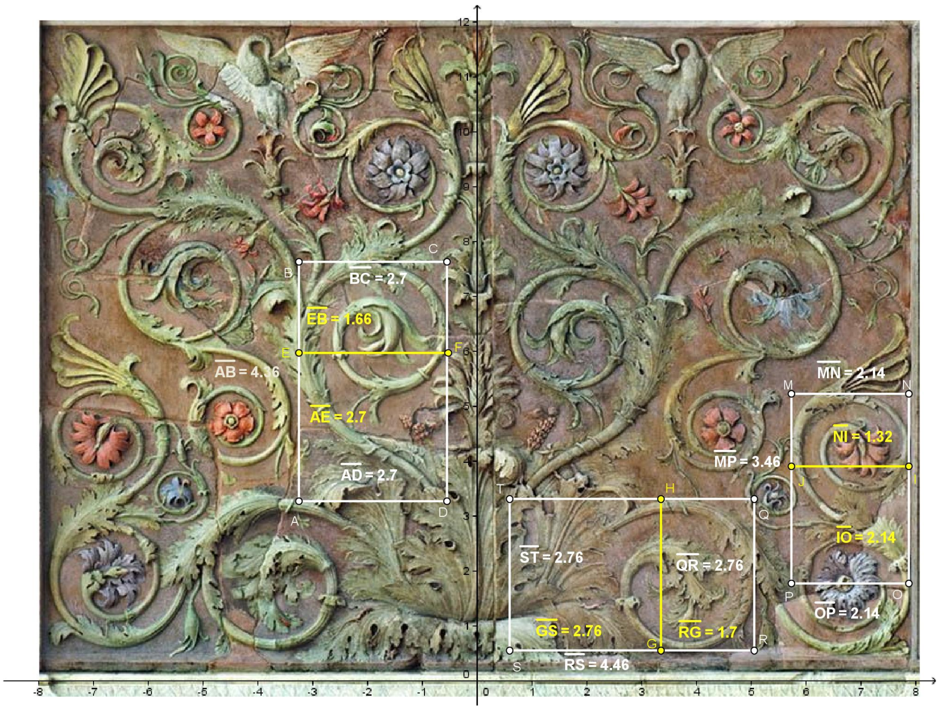

Figura 7


A = (1.44, 0)
B = (1.44, 5.76)
F = (5.02, 0)
E = (5.02, 5.76)
D = (10.84, 0)
C = (10.84, 5.76)
$\overline{BE}$ = 3.58
$\overline{AD}$ = 9.4
$\overline{EC}$ = 5.82
$\overline{CD}$ = 5.76

Figura 8

Nell'ultimo paragrafo abbiamo considerato il fregio presente nel capitello di un'anta del *Didymaion*, il tempio di Apollo a Didima che, secondo quanto riferitoci dagli storici, fu costruito intorno alla fine dell'VIII secolo a.C.. Dopo la sua distruzione avvenuta ad opera dei Persiani, la ricostruzione del tempio avvenne in epoca ellenistica con Alessandro Magno, anche se non fu mai ultimato. A questo fregio abbiamo applicato i risultati ottenuti nello studio dell'Ara Pacis, osservando anche qui la presenza di una simmetria bilaterale con asse di riflessione centrale e la caratteristica delle spirali di essere inscritte in un rettangolo aureo, nonostante anch'esse non siano auree. Ma l'aspetto che più tenevamo a verificare riguardava il fatto che, presi sei punti che identificano i centri di altrettante spirali e fatta passare una conica per cinque di essi, il sesto possedesse la proprietà di appartenere alla conica. Il risultato ottenuto, al contrario di quanto riscontrato con il fregio dell'Ara Pacis, è stato la mancanza di tale proprietà, con il sesto punto D che appare distante dalla conica c **(Fig. 9)**.

Figura 9

Bibliografia

[1] Carl Boyer. *Storia della matematica.* Mondadori, Cuneo, 1998

[2] Hermann Büsing. *Archäologischer Anzeiger: Ranke und Figur an der Ara Pacis Augustae.* Walter de Gruyter and Co., Berlino, 1977

[3] Maria Laura Cafiero. *Ara Pacis Augustae.* Fratelli Palombi, Roma, 1989

[4] Giulia Caneva. *Il Codice Botanico di Augusto.* Silvana Editoriale, Milano, *in preparazione*

[5] Alessandra Carlini, Elisa Conversano, Laura Tedeschini Lalli. *Matematica e archeologia.* Articolo sulla ricostruzione completa dell'aspetto originale dei pavimenti delle tabernae dell'emiciclo dei Mercati di Traiano a Roma.

[6] David Castriota. *The Ara Pacis Augustae and the imagery of abundance in later Greek and early Roman imperial art.* Princeton University Press, Princeton, 1995

[7] Robert Cohon. *Journal of roman archaeology, Vol. 15, Num. 2. - Form and meaning: scrollwork on the Ara Pacis, grotesques in furniture design.* 2002

[8] Diane Atnally Conlin . *The Artists of the Ara Pacis: The Process of Hellenization in Roman Relief Sculpture.* University of North Carolina Press, 1997

[9] Vittorio De Marco, Salvatore Monti. *Roma antica. Religione, filosofia e scienza.* Jouvence, Roma, 1979

[10] Maria Dedò. *Forme: simmetria e topologia* Decibel-Zanichelli, Bologna, 2000

[11] Richard Dunlap. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* World Scientific, Singapore, 1999 pag. 139

[12] Michele Emmer. *Matematica e cultura 2001.* Springer, Milano, 2001

[13] GeoGebra. *www.geogebra.org.* Software di matematica dinamica per la didattica.

[14] Mario Geymonat. *Il grande Archimede.* Teti, Roma, 2006

[15] Mario Geymonat, Franco Minonzio. *Storia della società italiana, Vol. IV.* Teti, 1998

[16] Franco Ghione. *Appunti di storia della matematica.*

[17] Morris Kline. *Storia del pensiero matematico.* Einaudi, Torino, 1996

[18] Hans Peter L'Orange. *Acta ad archaelogiam et artium Vol. 1.* Universitetsforlaget, Roma, 1962

[19] Dennis Lawrence. *A catalog of special plane curves.* Dover, New York, 1972

[20] Carlo Marchini. *Appunti di geometria classica Cap. V.* A.A. 2005-2006

[21] Ana Millán Gasca. *All'inizio fu lo scriba.* Mimesis, Milano, 2008

[22] Giulia Maria Piacentini Cattaneo. *Algebra, un approccio algoritmico.* Zanichelli, Padova, 1996

[23] Orietta Rossini. *Ara Pacis.* Mondadori Electa, Milano, 2006

[24] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata.* Feltrinelli, Milano, 2001

[25] William Stahl. *La scienza dei Romani.* Laterza, Bari, 1974

[26] Edoardo Sernesi. *Geometria 1.* Bollati Boringhieri, Torino, 2000

[27] Treccani. *Storia della scienza, Vol. I: la scienza antica.* Istituto della Enciclopedia italiana, Roma, 2001

[28] Paul Ver Eecke. *Les coniques d'Apollonius de Perge.* Desclée-De Brouwer et C., Bruges, 1923

[29] Hans Walser. *The golden section.* The Mathematical Association of America, 2001

[30] Hermann Weyl. *Simmetry.* Princeton University Press, Princeton, 1989

[31] *www.arapacis.it.* Sito ufficiale del Museo dell'Ara Pacis