Il lavoro svolto si divide in due parti. La prima riguarda lo studio, nello spazio euclideo X, delle più conosciute figure geometriche. Questa parte è divisa in cinque capitoli, ognuno dedicato ad una singola figura, esclusi il primo e l'ultimo nei quali si affrontano alcuni problemi generali.
Nel primo capitolo, sono raccolti alcuni risultati necessari per lo sviluppo dei capitoli seguenti. Verranno richiamati nelle diverse definizioni e dimostrazioni proposte.
Il secondo capitolo si occupa del triangolo e si limita, quindi, allo spazio di dimensione due. Dopo le prime definizioni, offre due diverse dimostrazioni del teorema di Morley, il cui enunciato è il seguente:

(0.1) Teorema. ***(Morley,*** 1899***)***. *Sia* $\{x, y, z\}$ *un triangolo e sia fatta la trisezione dei suoi angoli. Siano* p, q *ed* r *i punti di intersezione tra le trisettrici adiacenti rispettivamente ai lati* a, b *e* c. *Il triangolo* $\{p, q, r\}$ *è equilatero (vedi figura 1).*

(figura 1)

Seguono alcune importanti disuguaglianze, quella isoperimetrica

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

dove $\mathcal{A}$ è l'area e p il semiperimetro del triangolo $\mathcal{T}$, e per $t \in X$

$$(\overline{tx})^2 + (\overline{ty})^2 + (\overline{tz})^2 \geq (\overline{gx})^2 + (\overline{gy})^2 + (\overline{gz})^2,$$

dove $g = (x + y + z)/3$ è il *centro di massa* di $\mathcal{T}$, ossia il baricentro della famiglia $\{(1, x), (1, y), (1, z)\}$ (la cui definizione è stata data nel primo capitolo). L'uguaglianza vale solo per $t = g$.
Tali disuguaglianze inducono a soffermarsi sul problema del minimo, ossia il Problema di Fermat:

(0.2) Proposizione. ***(Problema di Fermat)***. *Dato un triangolo acutangolo* $\mathcal{T} = \{x, y, z\}$, *trovare* t *che minimizzi la funzione*

$$u \longmapsto \overline{ux} + \overline{uy} + \overline{uz}\,, \quad u \in X.$$

Dimostrazione. (cenni)
La dimostrazione si divide in tre passi:

- 1° *passo:* Il punto t per cui è raggiunto il minimo, deve appartenere al triangolo chiuso. Supponiamo infatti che sia esterno e sia ad esempio x il vertice giacente nel semipiano opposto, rispetto al lato yz , a quello a cui appartiene t . Tracciamo la perpendicolare da t al lato yz e sia u il piede della perpendicolare. Allora vale la disuguaglianza

  $$\overline{tx} + \overline{ty} + \overline{tz} > \overline{ux} + \overline{uy} + \overline{uz}\,,$$

  ossia t non minimizza la sommatoria, il che è assurdo.

- 2° *passo:* Il minimo è raggiunto per i punti t dai quali ogni lato del triangolo sottende un angolo pari a $2\pi/3$.

(figure 2 e 3)

- 3° *passo:* Mostriamo che il punto t , per cui è raggiunto il minimo, è unico e del tipo di cui al secondo passo. Applichiamo una rotazione di $\pi/3$ con centro in y al triangolo $\{x, t, y\}$, otteniamo il triangolo $\{x', t', y\}$. I triangoli $\{x, y, x'\}$ e $\{t, y, t'\}$ sono equilateri (vedi figura 2). In generale abbiamo

  $$\overline{tx} + \overline{ty} + \overline{tz} = \overline{x't'} + \overline{t't} + \overline{tz} \geq \overline{x'z}\,, \qquad (1)$$

  ossia la linea è spezzata. Ma nel nostro caso, in cui t minimizza la somma, vale l'uguaglianza. Quindi abbiamo

  $$y\,\widehat{t}\,z = \pi - (y\,\widehat{t}\,t') = \frac{2\pi}{3}\,,$$

$$x\,\widehat{t}\,y = x'\,\widehat{t'}\,y = \pi - (t\,\widehat{t'}\,y) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

(vedi figura 3). Quindi il punto t che minimizza la sommatoria (*punto di Fermat*), è tale che i lati del triangolo sottendono angoli di $2\pi/3$.

$\square$

In seguito il capitolo offre la definizione di *pedal triangle*, triangolo che ha come vertici p, q ed r i piedi delle ortogonali da $t \in X$ ai lati del triangolo $\mathcal{T}$ (con abuso di notazione, in quanto p, q e r potrebbero essere allineati su una retta, detta *retta di Simson*, e il luogo dei punti t per cui ció si verifica è la circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$).
Dopo aver ottenuto l'espressione della sua area, si dimostra che questa è massima per $t = \omega$, con ω centro della ciconferenza circoscritta a $\mathcal{T}$, e il luogo dei punti per cui ha valore arbitrario k è costituito da due circonferenze con centro in ω (vedi figura 4).

(figura 4)

Il capitolo si conclude con il seguente teorema:

(0.3) Teorema. ***(Erdös-Mordell).*** *Sia $\mathcal{T} = \{x, y, z\}$ un triangolo e t un punto interno a $\mathcal{T}$. Siano p, q ed r i vertici del pedal triangle rispetto a $\mathcal{T}$. Abbiamo*

$$\overline{tx} + \overline{ty} + \overline{tz} \geq 2(\overline{tp} + \overline{tq} + \overline{tr}) \tag{2}$$

e se l'uguaglianza è verificata $\mathcal{T}$ è un triangolo equilatero.

È un risultato enunciato da Erdös nel 1935 e dimostrato da Mordell nel 1937. La dimostrazione più semplice è però del 1945, ad opera di D. K. Kazarinoff.

Il terzo capitolo, dedicato alla sfera, si apre con alcune definizioni e osservazioni elementari, ma necessarie. Inizialmente si occupa della sfera vista in relazione ad altre sfere o altri oggetti. Il primo risultato rilevante è il seguente:

(0.4) Proposizione. *Date $n+1$ sfere $S_i = S(x_i, \mathrm{r}_i)$ nello spazio X di dimensione n, con x_i indipendenti, e $n+1$ angoli $\varphi_i \in [0, \pi]$, esistono al più due sfere che intersecano ogni S_i, formando l'angolo φ_i $(i = 1, \ldots, n+1)$.*

Dimostrazione. (cenni)
Sia $S = S(x_0, \mathrm{R})$ la sfera cercata. Sappiamo che $d_{0i}^2 = \overline{x_0 x_i}^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{r}_i^2 - 2\mathrm{R}\,\mathrm{r}_i \cos\varphi_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ e ugualmente per le altre distanze tra i diversi centri delle sfere. Sostituiamo questi valori nel determinante di Cayley-Menger (definito nel primo capitolo) che sappiamo essere nullo. Dallo svolgimento dei calcoli otteniamo al più due valori per x_0, ognuno corrispondente ad un singolo raggio. $\square$

(0.5) Osservazione. La proposizione (0.4) ci permette di affermare che al più esistono 2^{n+1} sfere tangenti a $n+1$ sfere fissate (vedi figure 5 e 6).

(figure 5 e 6)

In seguito viene data la definizione di *potenza di un punto* rispetto ad una sfera, il che conduce a quella di *iperpiano radicale*. Dopo aver introdotto la nozione di *inversione* rispetto ad una sfera, vengono visti alcuni risultati che ne derivano, come l'immagine di un iperpiano e di una sfera attraverso tale applicazione e il coniugato di un'inversione.
Una seconda parte del capitolo è dedicata alla sfera in se stessa, sottolineando

(figura 7)

le importanti applicazioni pratiche nelle quali è coinvolta: in meccanica, in astronomia, nella navigazione, etc. Si occupa della trigonometria sferica e in particolare dello studio del *triangolo sferico* (vedi figura 7) con alcune disuguaglianze e la formula fondamentale:
per ogni triangolo sferico

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \tag{3}$$

Il capitolo introduce poi la nozione di triangolo polare, il che porta alla formula di Girard, che ci dà il valore dell'area del triangolo sferico. La dimostrazione di questa formula si avvale della nozione di fuso sferico e il valore dell'area della sua superficie. Le differenze con i triangoli del piano euclideo sono sottolineate dalla proposizione che dà i criteri di uguaglianza tra triangoli sferici. Infatti in particolare due triangoli sferici $< x, y, z >$ e $< \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} >$ con angoli uguali sono uguali se e solo se esiste $f \in Is(S)$ tale che $f(x) = \tilde{x}$, $f(y) = \tilde{y}$, $f(z) = \tilde{z}$.
Il quarto capitolo si occupa della circonferenza tornando, quindi, allo spazio di dimensione due. Studia per quali condizioni quattro punti $x, y, z, t \in X$ appartengono alla stessa circonferenza. Il primo criterio che dà è puramente metrico (è anche una condizione di collinearità) e deriva dal teorema di

Tolomeo:

$$d_{42}d_{31} + d_{43}d_{12} - d_{41}d_{23} = 0,$$
$$d_{42}d_{31} - d_{43}d_{12} + d_{41}d_{23} = 0, \qquad (4)$$
$$d_{41}d_{23} + d_{43}d_{12} - d_{42}d_{31} = 0.$$

dove d_{ij} sono le diverse distanze tra i quattro punti. I successivi risultati fanno uso della nozione di angolo orientato, il che porta a rilevanti differenze rispetto al caso di angoli non orientati (vedi osservazione (0.7)).

(0.6) Corollario. *Quattro punti distinti* $a, b, c, d \in X$ *dei quali nessuna terna* è *allineata, appartengono alla stessa circonferenza se e solo se* $\widehat{ca, cb} = \widehat{da, db}$.

(0.7) Osservazione. La doppia implicazione del corollario (0.6) è falsa per angoli non orientati, in quanto non vale la formula di Chasles.
Ciò che è vero è che, se i quattro punti appartengono alla stessa circonferenza, allora $a\widehat{c}b = a\widehat{d}b$ oppure $a\widehat{c}b + a\widehat{d}b = \pi$, ma l'inverso è falso.

Con questi risultati, in particolare utilizzando il corollario (0.6), viene dimostrato nuovamente il risultato riguardante la retta di Simson già visto nel secondo capitolo (oggigiorno tale teorema è attribuito a Wallace). Questa volta però vengono mostrate entrambe le implicazioni:

(0.8) Teorema. *Sia* $\mathcal{T} = \{a, b, c\}$ *un triangolo e* $x \in X$. *Le proiezioni* p, q, r *di* x *sui lati del triangolo, sono collineari se e solo se* x *appartiene alla circonferenza circoscritta a* $\mathcal{T}$.

Un altro criterio, per il quale quattro punti distinti appartengono ad una circonferenza, viene dato con il teorema di Miguel, che è il primo di una catena di teoremi che vedremo nel problema (0.13).
In seguito il capitolo offre la definizione di *pencil of circles*:

(0.9) Definizione. Siano C e C' circonferenze non concentriche. L'insieme $\mathcal{F} = \{\text{circonferenze} \quad \Gamma : \quad \Gamma \perp C\,, \Gamma \perp C'\}$ è detto *pencil of circles*. Se Γ, Γ' appartengono a $\mathcal{F}$, il pencil formato dalle circonferenze γ tali che $\gamma \perp \Gamma$ e $\gamma \perp \Gamma'$, è denotato con $\mathcal{F}^{\perp}$, e chiamato pencil ortogonale ad $\mathcal{F}$.

Vengono studiati i diversi casi che si ottengono a seconda delle posizioni di due circonferenze che appartengono a $\mathcal{F}$. La dimostrazione si articola in diversi passi, qui la illustriamo nelle figure 8, 9 e 10. Seguono due problemi simili nell'enunciato, ma dei quali il secondo ha una dimostrazione

(figura 8)

più complicata in quanto non puó utilizzare i risultati sulle inversioni usati per il primo (le rette non vengono trasformate in rette dalle inversioni).

(0.10) Osservazione. (alternativa di Steiner). Siano C e C' due circonferenze, con $C \subset C'$, e Γ_1 una circonferenza tangente internamente a C e esternamente a C' (vedi figura 11). Costruiamo una catena di circonferenze $\Gamma_i\,(i = 1, 2 \ldots)$ come segue:
per ogni i, sia Γ_{i+1} tangente a Γ_i, C e C' e diversa da Γ_{i-1}. Possiamo avere $\Gamma_i \neq \Gamma_1 \quad \forall i > 1$, ma se $\exists n$ tale che $\Gamma_n = \Gamma_1$, allora per ogni altra circonferenza iniziale Γ'_1, avremo $\Gamma'_n = \Gamma'_1$.

(0.11) Teorema. ***(Grande teorema di Poncelet per circonferenze).*** *Siano C e C' due circonferenze, con $C \subset C'$. Costruiamo una sequenza di punti $x_i\,(i \geq 1)$, cominciando da $x_1 \in C'$, che rispettino le seguenti condizioni:*

- *la retta $x_i x_{i+1}$ è tangente a $C \quad \forall i$,*
- *$x_i x_{i+1} \neq x_i x_{i-1}$.*

Allora, o abbiamo $x_i \neq x_1 \quad \forall x_1 \in C'$ e $\forall i > 1$, oppure $\exists\, n$ tale che $x_n = x_1 \quad \forall x_1 \in C'$ (vedi figura 12).

Seguono il problema di Apollonio (trovare una circonferenza tangente a tre date: dall'osservazione (0.5), sappiamo che esistono al più otto soluzioni), di Napoleone-Mascheroni ed infine, il teorema di Mohr-Mascheroni (studiano le

(figure 9 e 10)

costruzioni possibili con il solo compasso).
La prima parte del lavoro si conclude con il quinto capitolo, nel quale si danno le dimostrazioni di alcuni problemi ed esercizi. Il primo è il seguente:

(0.12) Problema. (retta immagine). Sia $\mathcal{T}$ un triangolo e r una retta di X. Mostrare che le riflessioni ortogonali di r attraverso ogni lato di $\mathcal{T}$, hanno un punto in comune (in tal caso la retta r è detta *buona*), se e solo se r passa per l'intersezione delle altezze di $\mathcal{T}$.

Il nome retta immagine del problema (0.12), si riferisce alla retta r alla quale appartengono i tre punti x', x'', x''', riflessioni ortogonali di x attraverso i tre lati del triangolo, che consideriamo come specchi (vedi figura 13). Da questo problema vengono ricavati altri piccoli ma importanti risultati. Il seguente problema è formato in realtà da una catena di teoremi il primo dei quali, come detto in precedenza, è stato enunciato nel quarto capitolo (teorema di Miguel).

(0.13) Problema.

1. Siano r_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ quattro rette in X, e C_i la circonferenza circoscritta al triangolo formato dalle tre rette r_j $(j \neq i)$. Mostrare che le quattro circonferenze C_i hanno un punto p_i in comune (vedi figura 14).

(figura 11)

(figura 12)

2. Siano $r_i\,(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ cinque rette in X, e sia p_i il punto ottenuto dal problema precedente, considerando le quattro rette $r_j\,(j \neq i)$. Mostrare che i cinque punti p_i appartengono alla stessa circonferenza (vedi figura 15).

3. Enunciare e provare una catena di teoremi, della quale i primi due siano quelli appena enunciati.

Dimostrazione. (cenni) Cominciamo con l'enunciare la catena richiesta nel punto 3:
Th_{2n}: Siano $r_i\,(i = 1, \ldots, 2n)$ $2n$ rette di X e C_i la circonferenza associata alla famiglia di rette $r_j\,(j \neq i)$ dal teorema Th_{2n-1}. Allora le $2n$ circonferenze C_i hanno un punto in comune.

(figura 13)

(figura 14)

Th_{2n+1} : Siano $r_i\,(i=1,\dots,2n{+}1)$ $2n{+}1$ rette di X e p_i il punto associato alla famiglia di rette $r_j\,(j\neq i)$ dal teorema Th_{2n}. Allora i $2n+1$ punti p_i appartengono alla stessa circonferenza C.
I teoremi Th_4 e Th_5 sono quelli enunciati nei punti 1 e 2. I teoremi per n qualsiasi vengono dimostrati con il metodo induttivo. $\square$

L'ultimo problema affrontato è il seguente:

(0.14) Problema. (Ford circles).

1. Siano $\gamma\,,\delta$ e α tre circonferenze tangenti tra loro e ad una retta r, nella situazione della figura 16. Se r e s sono i raggi di γ e δ, e ρ è il raggio della circonferenza piccola α, trovare $\rho, \overline{ax}$ e $\overline{bx}$ in funzione di $\overline{ab}$, r e s (dove $a\,,b$ e x sono i punti di tangenza, con la retta r, rispettivamente delle circonferenze $\gamma\,,\delta$ e α).

2. Considerando due circonferenze le cui equazioni, sono $x^2+y^2-y=0$ e $x^2+y^2-2x-y+1=0$, usare l'induzione per costruire circonferenze

(figura 15)

come nella figura 17.
Mostrare che i punti di tangenza di queste circonferenze, con l'asse delle ascisse, hanno sempre ascissa razionale. In questo modo, si ottengono tutti i numeri razionali in $[0, 1]$?

(figura 16)

La seconda parte del lavoro, che si divide negli ultimi due capitoli, si distacca dalla prima, più specificatamente scientifica, in quanto offre alcune considerazioni sull'insegnamento della geometria oggigiorno. Si vuole valorizzare questa disciplina, capendone l'importanza e quali dovrebbero essere gli obiettivi da raggiungere nel trasmetterla agli studenti della scuola secondaria.
In un interessante lavoro di Joseph Malkevitch (Malkevitch,1991), è stata realizzata una revisione dei differenti campi che oggi si possono considerare legati alla geometria: Geometria euclidea, Geometria metrica, Geometria non euclidea, Giochi geometrici, Geometria proiettiva, Teoria dei codici, Geometria descrittiva, Geometria integrale, Geometria analitica, Cartografia, Trasformazioni geometriche, Cristallografia, etc.
Quindi la parola "Geometria" nasconde una grande quantità di campi di

(figura 17)

grande interesse matematico e le applicazioni geometriche sono sempre più ampie e numerose. Per questo l'educazione matematica deve considerare imprescindibile il dare agli alunni una certa cultura geometrica che richiede sviluppare specifiche capacità, possedere un vocabolario adeguato, una visione globale delle applicazioni attuali e una sensibilità per il ragionamento, per la bellezza e per l'utilità.
Attualmente, l'insegnamento della geometria dovrebbe comprendere molti aspetti. Tra questi possiamo considerare i seguenti:

- la Geometria come scienza dello spazio.
- la Geometria come metodo per la visualizzazione di concetti e processi matematici.
- la Geometria come punto di incontro tra la Matematica come teoria e la Matematica come modello.

Ognuno di questi aspetti necessita, da un punto di vista educativo, una forma specifica di insegnamento e un modello appropriato di apprendimento.
Un'altra importante osservazione nella didattica della geometria, riguarda l'uso dei simboli. Infatti, la formazione di concetti ha il suo fondamento nell'osservazione di oggetti e situazioni reali, e non può completarsi senza l'uso di simboli per disegnarli e trasmetterli. I *concetti* (retta, parallelismo, ortogonalità...), che effettivamente sono una categoria mentale necessitano, per la loro assimilazione, manipolazione e trasmissione, l'uso di suoni, immagini, etichette linguistiche, ossia *simboli*, con i quali esprimere l'idea fondamentale.

Questi devono avere la funzione di far comprendere, ricordare e comunicare, far costruire nuovi concetti e facilitare la creatività, far riflettere e automatizzare.
Secondo Santaló *"Ogni professore dovrà organizzare il corso a suo modo, con gli esempi che ritiene opportuni, tenendo in considerazione gli interessi e le preferenze degli alunni."* Si possono infatti dare degli obiettivi generali, concettuali, di procedimento e attitudinali, ma sta poi ad ogni singolo insegnante organizzare in maniera specifica il corso.
Il sesto capitolo si chiude con l'analisi delle qualità principali che è desiderabile che gli studenti posseggano: la visualizzazione (che corrisponde alla capacità di osservare), la strutturazione (che corrisponde alla capacità di astrarre), la traduzione (che corrisponde alla capacità di comunicare) e la determinazione (che corrisponde alla capacità di organizzare).
Nel settimo capitolo, viene proposta la teoria di Van Hiele. Il suo lavoro propone un modello di stratificazione della conoscenza umana in una serie di livelli. L'apprendimento è paragonato ad un processo induttivo. Ad un livello $n-1$, possono essere studiate certe versioni limitate degli oggetti geometrici. Possono essere spiegate alcune relazioni tra gli oggetti, ma altre, in questo livello, non sono ancora accessibili. Nel livello n si suppongono ormai appresi tutti i contenuti del livello $n-1$, e si spiegano le relazioni che anteriormente erano implicite, aumentendo, in questo modo, il grado di comprensione dei diversi argomenti. Quindi, gli oggetti del livello n sono estensioni di quelli del livello $n-1$.
Gli ultimi due paragrafi del capitolo applicano questa teoria nel dare definizioni e dimostrazioni con un esempio pratico di lavoro in classe .
I testi elencati nella bibliografia sono stati tutti utilizzati o, per lo meno, consultati nella stesura del lavoro.
Ringrazio in modo particolare il professor Pascual Jara dell'università di Granada per la sua disponibilità e il suo aiuto durante la stesura della tesi.

Bibliografia

[1] BERGER,
Geometry, I, II, Springer-Verlag.

[2] BERGER, PANSU, BERRY, SAINT-RAIMOND,
Problems in geometry, Springer-Verlag.

[3] COXETER,
Introduction to Geometry, Wiley.

[4] SERNESI,
Geometria 1, 2, Bollati Boringhieri.

[5] CARTAN,
Differential calculus, Hermann.

[6] COXETER,
American Mathematical Monthly, 75: 5-15.

[7] CRUCIANI,
Appunti Matematiche Complementari.

[8] HOCKING, YOUNG,
Topologia, Revertè.

[9] CATALÁ, AYMEMÍ, GÓMEZ,
Por qué geometria?, Sintesis.

[10] CATENI, FORTINI, BERNARDI
Il nuovo pensiero geometrico 2, Le Monnier.