Summary of the thesis

Aims of the thesis

The main aim of the thesis is to present, in a detailed, complete, rigorous and comparative way, the construction of Dedekind's and Cantor's model of reals numbers, starting from Peano axioms for the natural numbers, with particular attention to:

1. Use of the theory of limits (especially in Dedekind's approach)

2. Use of Axiom of Choice (AC), and its weaker denumerable form (Axiom of Countable Choice (CC)) and, more in general, the role of these principles in theorems of elementary Analysis

3. Comparison between these "constructive approaches" and the "direct axiomatic approach" to $\mathbb{R}$

Comments and historic reference frame

We apologize with our English readers, but the following section will be in Italian.

Commenti

Negli anni '70 i testi di Analisi, vedi Zwirner [Zv1] o Scorza-Dragoni [SD1], seguivano essenzialmente l'approccio costruttivo alla Dedekind dei numeri reali. L'esposizione di tale approccio presentava, peró, dei limiti. Le conoscenze preliminari di base da cui partire non si delineavano efficacemente o si davano per acquisite nozioni elementari, ma non banali, quali la conoscenza delle propritá aritmetiche dei naturali.
Come esporremo più nel dettaglio successivamente nella parte storica di riferimento, nei testi universitari l'approccio assiomatico diretto ai reali, più rigoroso e astratto, si è graduatamente sostituito a quello costruttivo, vedi Rudin [Ru1] o Giusti [Gi1].
Questa tesi ha voluto riproporre nel dettaglio l'approccio costruttivo ai reali, ripercorrendo formalmente il processo storico di "Aritmetizzazione dell'Analisi", che illustreremo più avanti, giudicando l'assiomatizzazione di Peano per i naturali, il giusto punto di partenza per un approccio costruttivo, astratto, rigoroso e autocontenuto. Un approccio che a nostro parere fornisce un contributo importante all'apprendimento "vero" della natura astratta della retta e della proprietà di continuità dei reali , oltre che un nesso chiave fra la didattica proposta dai primi corsi di Analisi e le relazioni con le tematiche dei primi corsi di Algebra e la Geometria.
Una motivazione che ha dato vita a questo lavoro è la mancanza, se non in testi più avanzati e dedicati quali il Mendelson [Me1], della costruzione dettagliata, "step by step", dei reali. Parziali esposizioni si possono, invece in testi di Analisi anii '70, come già detto o su testi di Algebra ([PC1], [Fo1] o [Hn1]).

Proprio la chiara componente algebrica che caratterizza l'approccio costruttivo ai reali, ha suggerito una particolare attenzione, specialmente nella versione di Dedekind, a quanta teoria dei limiti occorresse.
Giusti nel testo [Gi2] asserisce che: *la costruzione dei reali secondo Dedekind presuppone solamente la conoscenza delle proprietà fondamentali dei numeri razionali.* Come vedremo non possiamo che condividere la sua teoria, ma la risposta al nostro quesito non sarà del tutto negativa.
Più precisamente è la proprietà Archimedea dei razionali il requisito essenziale che entra in gioco nella cotruzione alla Dedekind. Dimostrando questa proprietà, ci si accorge che il punto chiave è conferire ai naturali la qualità di sottoinsieme illimitato (dato un numero razionale positivo esiste sempre un naturale maggiore di esso), che riformulata in termine di limite: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.
Come si vedrà nella Sezione 1.3, il nostro approccio sarà ancora più attinente all'Analisi, e verranno usate risultati più marcatamente di natura analitica, dell'approccio standard.

Un secondo quesito di indagine è l'occorrenza dell'Assioma di Scelta (AC) e della sua formulazione numerabile (CC), sia nella costruzione dei reali, sia nei teoremi fondamtali dell'Analisi elementare.
Formulazioni standard di tali assiomi sono:

AC: *Data una qualsiasi collezione V non vuota di sottoinsiemi non vuoti di un insieme X, esiste una funzione $f : V \longrightarrow X$ tale che per ogni C elemento di V, $f(C) \in C$*

CC: *Data una collezione V numerabile di sottoinsiemi non vuoti di un insieme X, esiste una funzione $f : V \longrightarrow X$ tale che per ogni C elemento di V, $f(C) \in C$*

Rileggendo CC in formule, si traduce seguente modo:
CC: $\{ E_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)^1 - \{\emptyset\} \implies \exists \{ e_n \}_{n\in\mathbb{N}} \mid e_n \in E_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
Si noti come CC appaia "così ovvio" e naturale che, a fatica ci si rende conto di usare un assunzione in più.
Come vedremo AC e CC non intervengono nella costruzione dei modelli di Cantor e Dedekind per i numeri reali.
Viceversa sono diversi i risultati principali di un corso di Analisi 1, quali il teorema dell'unione numerabile (Countable Union Theorem (CUT)), il teorema ponte di Heine-Cantor, il teorema di massimo e minimo di Weierstrass, che necessitano di CC (anche se tale fatto, di solito, non viene menzionato nei libri di testo).
Dall'altra parte, AC sembra non intervenire mai nel programma didattico di un primo corso di Analisi. Per trovare una sua applicazione dobbiamo cercare fra le funzioni patologiche (quali le "ugly functions", ovvero funzioni definite globalmente su $\mathbb{R}$, lineari,

[1] $\mathcal{P}(X)$ insieme delle parti di X, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X

identità sui razionali ma non su tutti i reali).

Sommario della parte storica

In questa sezione proporremmo il percorso storico che ha condotto alla ricerca sui fondamenti dei reali.
Le conoscenze attuali della natura dei numeri reali, sono uno dei risultati di un processo intellettuale lungo e complesso che coinvolse l'intera Matematica, che da mero strumento di modellizzazione della realtà, si è evoluta verso l'astratto, con "l'introspezione" delle sue nozioni più basilari, le sue fondamenta concettuali, verso l'impostazione rigorosa che ne caratterizza la logica deduttiva e il suo linguaggio autocontenuto.

La ricerca dei Fondamenti in Matematica è un percorso che si è sviluppato su questo contrasto, affermando l'autonomia del linguaggio dall'intuizione. Un percorso volto a stabilire un maggior rigore concettuale delle nozioni basilari, primitive tentando di fondarle in un contesto astratto.

In questa prima parte dell'introduzione ripercorreremo le principali tappe di questo percorso e cioè:

Il primo prototipo di impostazione assiomatica (Euclide, IV−III sec. a.C.);

"l'era del Rigore" del XVIII secolo che sfoció nella nascita delle Geometrie non Euclidee e nell'Aritmetizzazione dell'Analisi;

l'acceso dibattito tra i programmi per i Fondamenti e il "successo" del programma formalista hilbertiano;

Infine analizzeremo come questo percorso abbia influenzato la didattica e quanto la didattica riporti di questo percorso sulle basi concettuali della Matematica.

Contents of the thesis

Contents

A brief survey of Set Theory and Logic

The thesis begins with this brief survey of set theory and logic notions, we need in this work. Further we give the main standard definitions on set theory that we use (relation, function, operation ...).

The thesis real body is divided in three parts.

Part 1: Chapter 1 and 2

This is the "constructive" part of this work. We prove the following result:

given a Peano System (the triple ($\mathbb{N}$, 1, σ) with Peano axioms) there exists a model of a Complete Ordered Field (COF), namely the quadruple $\left(\mathbb{R},\, +_{\mathbb{R}},\, *_{\mathbb{R}},\, \leq_{\mathbb{R}}\ \right)$ con 15 algebraic properties and the least upper bound property

Chapter 1

In this Chapter we prove the following result:
Given a Peano Systems $(\mathbb{N},\, 1,\, \sigma)$, there exists a model of an Ordered Field (OF), namely the quadruple $\left(\mathbb{Q},\, +_{\mathbb{Q}},\, *_{\mathbb{Q}},\, \leq_{\mathbb{Q}}\ \right)$ with 15 algebraic properties, which contains a copy of a Peano System.

As wished, we divided this Chapter into 3 sections.

Section 1.1

The Section starts with: definition of a Peano System; definition of a Peano Ring (the quadruple $\left(\mathbb{N},\, +_{\mathbb{N}},\, *_{\mathbb{N}},\, \leq_{\mathbb{N}}\ \right)$ with 10 algebraic properties); aim: Given a Peano System we could define two binary inner operations $+_{\mathbb{N}}$, $*_{\mathbb{N}}$ on $\mathbb{N}$, an order relation $\leq_{\mathbb{N}}$ on $\mathbb{N}$ such that

$\left(\mathbb{N},\, +_{\mathbb{N}},\, *_{\mathbb{N}},\, \leq_{\mathbb{N}}\ \right)$ is a model of a Peano Ring.
First results of this Section (the most significative and meaningful one of the first part) Induction Theorem, to prove by induction, and Recursion Theorem, to justify definition by recursion. The latter one is the Section's hardest and the most fundamental result. In Final two subsections: Isomorphism between Peano Systems and Induction's extension (Strong induction and Minimum principle) of a Peano Ring.

Section 1.2

The Section starts with: definition of an Ordered Integrity Domain (OID), namely the quadruple $\left(\mathbb{Z},\, +_{\mathbb{Z}},\, *_{\mathbb{Z}},\, \leq_{\mathbb{Z}}\ \right)$ with 14 algebraic properties; aim: Given a Peano Ring there exists a model of an OID which contains a copy of a Peano Ring.

Section 1.3

The Section's start is definition of an OF and its aim: given an OID there exists a model of an OF which contains a copy of on OID. Further, after immersion of OID, we prove Archimedean property of the rational. In final definitions and main properties of rational powers (to prepare Dedekind's construction of the reals).

Chapter 2

Chapter 2 completes the final construction of the real numbers. This Chapter is divided in two independent sections, in each of them we prove the same result: given an OF There exists a model of a COF which contains a copy of an OF

Section 2.1 Construction via Dedekind cuts

Section 2.1 Construction via rational Cauchy sequences

Part 2: Chapter 3

This part represent the "first part's other way round".

Section 3.1

We approach directly to a COF $\left(\mathcal{R}, +_{\mathcal{R}}, *_{\mathcal{R}}, \leq_{\mathcal{R}}\right)$, with its 16 properties. Given a COF, the following sections explore its special subsets and some of its important properties.

Section 3.2

The Section starts showing existence of a proper subset $\mathbb{N}_{\mathcal{R}}$ such that, defining a function σ as $\sigma(x) := (x+1)_{|\mathbb{N}_{\mathcal{R}}}$, $(\mathbb{N}_{\mathcal{R}}, 1, \sigma)$ is a copy of a Peano System. Later on we show as $\mathbb{N}_{\mathcal{R}}$ is a copy of a Peano Ring, restricting to $\mathbb{N}_{\mathcal{R}}$ the binary inner operations $(+, *)$ and the order relation $(\leq)$. Successively we show discreteness of $\mathbb{N}_{\mathcal{R}}$ and its closure for subtraction $n-m$ for $n>m$.
Furthermore special proper subsets $\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}$ and $\mathbb{Q}_{\mathcal{R}}$ is showed be copies of, respectively, OID and OF, restricting to them the binary inner operations $(+, *)$ and the order relation $(\leq)$.
The Section ends showing Archimedean property of $\mathcal{R}$ and density of $\mathbb{Q}_{\mathcal{R}}$ in $\mathcal{R}$

Section 3.3

Finite and infinite subsets of a COF $\mathcal{R}$. Sequences in $\mathcal{R}$ and definition of bounded, monotone, convergent and Cauchy sequence.

Section 3.4

Convergence of Cauchy sequences in $\mathcal{R}$

Section 3.5

Theorem of Isomorphism between two models of a COF

Part 3: Chapter 4

Axiom of Choice and elementary Analysis

In this Chapter we show basic Set Theory results and some of elementary Analysis main theorems, in which necessity of infinite arbitrary choices compares, when it is indispensable and when it could be avoided.

Section 4.I General remarks on AC

Section 4.1

Countable Union Theorem (Cantor 1872). Historically it is one of the foremost example of necessity of Axiom of Countable Choice (CC).

Section 4.2

Equivalence between classic definition for infinite subsets and Dedekind definition for infinite subsets, needs CC

Section 4.3

This Section is one of the most significative part of Chapter 4.
We consider $\mathbb{R}$ with its natural topology given by $|\cdot|_{\mathbb{R}}$. After we show how, equivalence between "static" and "dynamic" definition of limit point (and hence definitions of closed sets), needs CC.
We present two proofs of the Bolzano-Weierstrass theorem.The first one, classic, uses

CC; the second one, quite similar to the first, avoids it.

Section 4.4

Continuous functions. We propose an example of a use of CC, in elementary Analysis, which does not concern equivalence of definitions: Weierstrass maximum and minimum theorem.

Section 4.5

Some of the most known equivalent principles of AC: Cantor Well-Ordering principle, Zorn Lemma, Hausdorff Maximality Principle

Section 4.6

A powerful pathological application of AC: Existence of an "ugly function" on the reals, namely a linear function on the reals, but non continuous on them.

Characteristic contents

We conclude this introduction underlying some particular choices we have made in our exposition:

- In Chapter 1, conclusion, in both of Sections 1.2 and 1.3, is a remark on arbitrary choices in definitions of operations and order relation in $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$. In each of these sections, models more complex structure E is identified with a quotient set on the cartesian product by given structure e with itself. Order relation $\leq_E$ and operations $+_E$, $*_E$ is defined on equivalence class, as consequence of "well posed" relations on $e \times e$.
  In each of these two remarks, we show a method to choose a determinate representant in $e \times e$ for any element of E., preluding how one could define order relation and operations without selecting arbitrary representant

- Section 2.1, construction via Dedekind cuts. As we told before in section I.1, Archimedean property of $\mathbb{Q}$ has a fundamental role in this method. Its occurrence appears proving that, a cut ξ_α, previously defined in function of a given positive cut α, is the inverse of α, namely α^{-1}
  In this thesis we handle mentioned passage through properties of small positive rational powers. It is specified how this method, do not avoid Archimedean property of the rational numbers, since the latter is required in mentioned rational powers properties owns proofs.

- In Section 3.1, the subset $\mathbb{N}_{\mathcal{R}}$, Peano System copy's framework in un COF $\mathcal{R}$, is deduced by subsets having a particular property, named "property C". This property characterizes finite subset trough least upper bound property (named **Ded**) of $\mathcal{R}$. Appendix A explains, how use of **Ded** is not necessary.

Appendix A

Structures containing Peano Systems

Minimal characteristics for a structure to contained a copy of a Peano System as a proper subset. We generalize standard characterization of a Peano System as intersection of all inductive subsets. In an another point of view, this Appendix represents a Peano axioms's analysis, giving a method to find, in a structure, a subset which satisfies Induction property.

Bibliography

[Bo1] Boyer C.B. (1968), "History of Mathematics", John Wiley & Sons

[Co1] Courant R. and Robbins H. (1941), "What is Mathematics", Oxford University Press

[De1] Dedekind R. (1901), "Essay on the theory of numbers", Open Court Publishing Company

[Di1] Dieudonnè J. (1967), "Elements d'Analyse tome I", Gauthiers-Villars

[Fe1] Feferman S. (1993), "The development of programs for the foundations of Mathematics in the first third of 20th century"

[Frs1] Ferreiròs J. (2007), "Labyrinth of Thought", Birkäuser

[Fo1] Fontana M. (1989), "Insiemi, numeri e polinomi : primo ciclo di lezioni del corso di algebra con esercizi svolti" CISU

[Gi1] Giusti E. (2002), "Analisi Matematica 1. terza edizione", Bollati-Boringhieri

[Gi2] Giusti E. (2007), "Piccola storia del calcolo infinitesimale dall antichità al novecento", Istituti editoriali e poligrafici internazionali

[He1] Herrlich H. (2006), "Axiom of Choice", Springer-Verlag

[Hn1] Hungerford T.W. (1974), "Algebra", Springer-Verlag

[Is1] Israel G. (1980) "Rigore e Assiomatica nella Matematica Moderna, in Scienza e Storia. Analisi critica e problemi attuali", Editori Riuniti

[Je1] Jech T.J. (1973), "The Axiom of Choice", North-Holland Publishing Company

[La1] Landau E. (1951), "Foundations of Analysis", Chelsea Publishing & Co.

[Lo1] Lolli G. (1973), "Teoria assiomatica degli insiemi", Boringhieri

[Me1] Mendelson E. (1973), "Number Systems and the Foundations of Analysis", Paperback

[MG1] Millàn Gasca A. (2004), "All'inizio fu lo scriba", Mimesis

[Mo1] Moore G. (1982), "Zermelo's Axiom of Choice. its origin developments and influence", Springer-Verlag

[PC1] Piacentini Cattaneo G.M. (1996), "Algebra", Zanichelli

[RR1] Rubin J.E. and Rubin H. (1961), "Equivalence of the Axiom of Choice", North-Holland Publishing Company

[Ru1] Rudin W. (1976), "Principles of Mathematical Analysis third edition", McGraw-Hill

[Ru2] Rudin W. (1986), "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill

[SD1] Scorza Dragoni G. (1967), "Elementi di Analisi Matematica", Cedam

[Sh1] Shoenfield J.R. (1967), "Matematical Logic", Addison-Wesley Publishing Company

[Th1] Thurston H.A. (1956), "The Number System", Blackie & Son

[Tr1] Troelstra A.S. (1991), "History of constructivism in the 20th century"

[VN1] Von Neumann J. (1947), "The Mathematician", University of Chicago Press

[Zv1] Zwirner G. (1972), "Elementi di analisi matematica", CEDAM