TLC Locale per un modello di cammino aleatorio in mezzo aleatorio fluttuante

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di

Alessandra Lionetti

Relatore

Prof. Alessandro Pellegrinotti

L'obiettivo della tesi è stato dimostrare il TLC locale per un modello di cammino aleatorio in un mezzo aleatorio fluttuante.
Inizialmente è stata studiata la validità del TLC quasi ovunque per un modello di passeggiata aleatoria in un mezzo aleatorio fluttuante.
Successivamente, attraverso la dimostrazione di alcuni lemmi, è stato possibile ottenere delle stime che sono state utilizzate nella dimostrazione del TLC locale.
La suddivisione dei capitoli spiega il percorso seguito nell' acquisizione degli elementi necessari alla dimostrazione del teorema.
Nel primo capitolo viene descritto il modello di una passeggiata aleatoria su un reticolo $\mathbb{Z}^\nu$ con $\nu \geq 1$ in un mezzo aleatorio fluttuante.
Con $X_t \in \mathbb{Z}^\nu$ viene indicata la posizione della passeggiata al tempo t, mentre la configurazione del mezzo al tempo t è:

$$\xi_t = \{\xi_t(x) : x \in \mathbb{Z}^\nu\} \in \Omega = S^{\mathbb{Z}^\nu}$$

dove S è un insieme finito. La configurazione del mezzo nel tempo e nello spazio è data da:

$$\xi := \{\xi_t(x) : (x,t) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}\} \in \widehat{\Omega} = S^{\mathbb{Z}^{\nu+1}} .$$

Supponiamo che ξ_t siano v.a. i.i.d distribuite secondo la misura di probabilità π_0 definita su S e sia $\Pi_0 = \pi_0^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$ la corrispondente misura prodotto su $\widehat{\Omega}$. Assumiamo che le probabilità di transizione del random walk per una fissata scelta di $\xi \in \widehat{\Omega}$ siano date da:

$$P(X_t = z | X_{t-1} = x; \xi) = P_0(z - x) + \varepsilon c(z - x; \xi_{t-1}(x)) \tag{1}$$

dove:

i) $P_0(\cdot)$ è una distribuzione di probabilità su $\mathbb{Z}^\nu$

ii) $\varepsilon \in (0,1)$

iii) $c(\cdot;\cdot)$ è una v.a. su $\mathbb{Z}^\nu \times S$ che tiene conto dell'interazione col mezzo.

La (1) esprime il fatto che stiamo considerando un modello in cui l'interazione del cammino col mezzo è locale, cioè le probabilità di transizione al tempo t dipendono solo dal valore del mezzo al tempo $t-1$ nella posizione X_{t-1} occupata dal cammino aleatorio.
Supponiamo che la passeggiata aleatoria inizi al tempo $t = 0$ in
$X_0 = 0$. Questa ipotesi non è restrittiva per l'omogeneità di P_0.
Facciamo le seguenti ipotesi su $c(\cdot\,;\cdot)$:

1) $\sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u; s) = 0 \quad \forall\, s \in S$

2) $\sum_{s \in \mathcal{S}} c(u; s)\pi_0(s) = 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{Z}^\nu$

L'ipotesi 1) è necessaria affinchè (1) sia una misura di probabilità.
Dall'ipotesi 2) segue che

$$\langle P(X_t = z | X_{t-1} = x; \xi) \rangle = P_0(z - x)$$

cioè P_0 è la probabilità di transizione media.

Il cammino aleatorio con probabilità di transizione P_0 verrà chiamato "cammino aleatorio medio".
Osserviamo che l'ipotesi 2) non è restrittiva perchè se fosse

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} c(u;s)\pi_0(s) \neq 0$$

potremmo riscrivere

$$\begin{aligned} & P(X_t = u|X_0 = 0;\xi) = \\ = \; & P_0(u) + \epsilon\langle c(u;\xi_{t-1})\rangle + \epsilon(c(u;\xi_{t-1}) - \langle c(u;\xi_{t-1})\rangle) = \\ = \; & \widetilde{P}_0(u) + \epsilon(c(u;\xi_{t-1}) - \langle c(u;\xi_{t-1})\rangle) \end{aligned}$$

riottenendo

$$\langle P(X_t = u|X_0 = 0;\xi)\rangle = \widetilde{P}_0(u)\ .$$

Facciamo le ulteriori assunzioni:

A) $P_0(u) + \epsilon c(u;s) \in [0,1) \quad \forall\, s \in S$

B) $\exists\ D \geq 1$ t.c. $P_0(u) = c(u;s) = 0$ per $|u| > D$ e $\forall\, s \in S$

dove $|u| = \sum_{i=1}^{\nu} |u_i|$; cioè $P_0(\cdot)$ e $c(\cdot\,;\cdot)$ hanno range finito.

C) La funzione caratteristica

$$\widetilde{p}_0(\tau) = \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} P_0(u)e^{i(\tau,u)} \quad \tau \in \mathcal{T}^\nu = [-\pi,\pi]^\nu$$

soddisfa

$$|\widetilde{p}_0(\tau)| < 1 \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}^\nu \quad \tau \neq 0\ .$$

Osserviamo che questa condizione implica la completa irriducibilità del cammino aleatorio medio.

D) In un intorno dell'origine , per $\tau \neq 0$, consideriamo

$$log\ \widetilde{p}_0(\tau) = i\sum_{k=1}^{\nu} b_k\tau_k - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\nu} c_{ij}\tau_i\tau_j + \cdots$$

dove c_{ij} è una forma quadratica strettamente positiva.

E) Posto Supp P_0:=$\{u : P_0(u) > 0\}$ assumiamo che

$$\text{Supp}\ c(\cdot\ ; s) := \{u \in \mathbb{Z}^\nu : c(u; s) \neq 0\} \subset \text{Supp}\ P_0 \quad \forall\, s \in S$$

Le condizioni **C**) e **D**) assicurano la validità del TLC per P_0.
L'ipotesi **E**) è di carattere tecnico e semplifica le dimostrazioni.
Sempre nello stesso capitolo e nell'ambito dello stesso modello, sono stati enunciati e brevemente dimostrati dei teoremi che, per una fissata configurazione del mezzo, stabiliscono la validità del TLC quasi ovunque in dimensione $\nu \geq 2$, $\nu \geq 3$ e $\nu \geq 5$.
Questa differenziazione riguardo alla dimensione del reticolo è stata effettuata in quanto si ottengono dei risultati leggermente differenti; infatti:
per $\nu \geq 2$ il TLC vale quasi ovunque come se il mezzo non ci fosse in quanto media e matrice di covarianza del random walk in mezzo aleatorio sono le stesse del random walk libero. Per $\nu \geq 3$ nell'ambito del nostro modello compaiono delle correzioni aleatorie alla media di X_t alle quali corrisponde una correzione aleatoria al TLC dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Per $\nu \geq 5$ invece compaiono delle correzioni aleatorie alla matrice di covarianza di X_t alle quali

corrisponde una correzione aleatoria al TLC dell'ordine di $\frac{1}{t}$.
Enunciamo ora questi teoremi di cui è accennata la dimostrazione nel primo capitolo della tesi e la cui dimostrazione completa si può trovare in [2].

Teorema 0.1 *Sia $\xi \in \widehat{\Omega}$, μ_T^ξ misura definita su $\mathbb{R}^\nu$ dal funzionale lineare in $\mathcal{C}^0$*

$$\mu_T^\xi(f) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} P(X_T = u | X_0 = 0, \xi) f\left(\frac{u - bT}{\sqrt{T}}\right) \qquad f \in \mathcal{C}^0 \quad .$$

Allora , per $\nu \geq 2$, se ε è sufficientemente piccolo, possiamo trovare un insieme $\widehat{\Omega}' \subset \widehat{\Omega}$ tale che $\Pi_0(\widehat{\Omega}') = 1$ e per $\xi \in \widehat{\Omega}'$ si ha che μ_T^ξ converge debolmente per $T \to \infty$ alla misura gaussiana μ data dall'espressione:

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^\nu} g(u) f(u) du$$

dove

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{C}{(2\pi)^\nu}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(u)} \\ \mathcal{A}(u) &= \sum_{i,j=1}^{\nu} a_{ij} u_i u_j \\ C &= det\ a \end{aligned}$$

con $a = \{a_{ij}\}$ inversa della matrice $c = \{c_{ij}\}$ che è la matrice di covarianza del random walk libero ($c_{ij} = \sum_u (u_i - b_i)(u_j - b_j) P_0(u) \;\; i, j = 1, \ldots, \nu$).

Ora passiamo alle correzioni al TLC per $\nu \geq 3$:

Teorema 0.2 *Per $\nu \geq 3$, definito*

$$\Phi_T(f|\xi) := \sqrt{T}(\mu_T^\xi(f) - \mu(f)) \quad con \quad f \in \mathcal{C}^2$$

si ha che per ε sufficientemente piccolo , per $n \geq 1$ fissato e per ogni $f \in \mathcal{C}^2$ $\Phi_T(f|\xi)$ converge in $L^{2n}(\Pi_0)$ al funzionale limite $\Phi(f|\xi)$.
Inoltre se $n\left(\frac{\nu}{2} - 1\right) > 1$ esiste un insieme $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ di Π_0-misura 1 tale che, per ogni $\xi \in \overline{\Omega}$ $\Phi_T(f|\xi)$ converge a $\Phi(f|\xi)$, per ogni $f \in \mathcal{C}^2$.

Per quanto riguarda le correzioni al TLC nel caso $\nu \geq 5$ si ha:

Teorema 0.3 *Per $\nu \geq 5$, definito*

$$\Psi_T(f|\xi) := T(\mu_T^\xi(f) - \mu(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Phi(f|\xi)) \quad con \quad f \in \mathcal{C}^3$$

si ha che per ε sufficientemente piccolo , per $n \geq 1$ fissato e per ogni $f \in \mathcal{C}^3$ $\Psi_T(f|\xi)$ converge in $L^{2n}(\Pi_0)$ al funzionale limite $\Psi(f|\xi)$.
Inoltre per $n\left(\frac{\nu}{2} - 2\right) > 1$ esiste un insieme $\overline{\Omega}' \subset \widehat{\Omega}$ di Π_0-misura 1 tale che, per ogni $\xi \in \overline{\Omega}'$ $\Psi_T(f|\xi)$ converge a $\Psi(f|\xi)$, per ogni $f \in \mathcal{C}^3$.

Il secondo capitolo è dedicato a complesse dimostrazioni di lemmi che hanno consentito di ottenere delle stime essenziali per provare la validità del TLC locale che qui viene enunciato e alla cui dimostrazione è dedicato tutto il terzo capitolo.
Prima di enunciare tale teorema, si premette la seguente definizione:

Definizione 0.4 *Definiamo il* **campo a ritroso** *a partire dal punto (T, y) nel seguente modo:*

$$\eta^{(T,y)}(t, x) := \xi(T - t, y - x) \quad t \in \mathbb{Z}, \;\; x \in \mathbb{Z}^\nu.$$

Il campo a ritroso $\eta^{(T,y)}$ ha la stessa distribuzione di ξ dal momento che si è assunto che le variabili $\{\xi_{t'}(x')\}$ siano i.i.d..

Enunciamo ora il **TLC Locale:**

Teorema 0.5 *Per ogni $\nu \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, esiste un funzionale $\widehat{Z}$ del campo a ritroso η tale che, scelte le costanti $K > 0$ e $\beta \in (0, \frac{1}{6})$, per tutte le successioni $y_T = y$ che soddisfano la disuguaglianza $|y - bT| \leq KT^{\frac{1}{2}+\beta}$ si ha che:*

$$\frac{\mathcal{P}^T(y|\xi)}{P_0^T(y)} - \widehat{Z}(\eta^{(T,y)}) \to 0$$

per $T \to \infty$ in $L_2(\Pi_0)$.

$\widehat{Z}(\eta) = 1 + \varepsilon\widehat{\mathcal{M}}(\eta)$, dove l' espressione esplicita di $\widehat{\mathcal{M}}(\eta)$ viene data nel corso della dimostrazione del teorema.
L' importante è che $\widehat{Z}$ è un funzionale del campo a ritroso solamente, cioè non dipende esplicitamente anche da T e da y, almeno al primo ordine asintotico.
$\mathcal{P}^T(y|\xi)$ è la probabilità condizionata del random walk in mezzo aleatorio, per andare da $(0,0)$ a (T,y), $P_0^T(y)$ è la probabilità del random walk libero di andare da $(0,0)$ a (T,y).
Per dimostrare questo teorema, denotiamo con $\chi^{(T)}$ una fissata traiettoria del cammino aleatorio nell'intervallo di tempo $[0,T]$:

$$\chi^{(T)} := \{(t, X_t) : t = 0, 1, \ldots, T\} .$$

La probabilità della traiettoria $\chi^{(T)}$, per una fissata configurazione $\xi \in \widehat{\Omega}$, è

$$\begin{aligned} P(\chi^{(T)}|\xi) = \prod_{t=0}^{T-1} P_0(X_{t+1} - X_t) + \\ + \quad \sum_{B \subset \chi^{(T)}} \epsilon^{|B|} \prod_{(\tau,x)\in B} c(X_{\tau+1} - x; \xi_\tau(x)) \prod_{\tau:(\tau,X_\tau)\notin B} P_0(X_{\tau+1} - X_\tau) \end{aligned}$$

dove B varia su tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{Z}^{\nu+1}$ del tipo
$\{(\tau, X_\tau) : \tau = 0, \ldots, T-1\}$ .Poniamo

$$B := \{(\tau_0, x_0), \ldots, (\tau_{n-1}, x_{n-1})\}$$

dove $n := |B|$ è la cardinalità di B e $\tau_{i+1} > \tau_i$.

Sia

$$M_B(\xi) := \prod_{i=1}^{|B|-1} h^{\tau_i-\tau_{i-1}}(x_i - x_{i-1}; \xi_{\tau_{i-1}}(x_{i-1}))$$

con

$$h^t(u;s) := \sum_z c(z;s) P_0^{t-1}(u-z) \quad t \geq 1$$

dove per definizione $P_0^0(u) := \delta_{0,u}$ e quindi $h^1(u;s) = c(u;s)$.
Poniamo inoltre

$$M(t,x|\xi) := \sum_{B: x_{n-1}=x, \tau_{n-1}=t} \epsilon^{|B|} P_0^{\tau_0}(x_0) M_B(\xi) \ .$$

Si ha allora che

$$\mathcal{P}^T(y|\xi) = P_0^T(y) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u; \xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^T(y|\xi) \ &:= \ \mathcal{P}^T(y|\xi) - P_0^T(y) = \\ &= \ \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u; \xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u). \end{aligned}$$

Poniamo $T_0 := [T^\gamma], \gamma \in (0, \frac{1}{3})$ e dividiamo $\mathcal{R}^T(y|\xi)$ in tre parti:

$$\mathcal{R}^T(y|\xi) = \mathcal{R}^T_{(1)}(y|\xi) + \mathcal{R}^T_{(2)}(y|\xi) + \mathcal{R}^T_{(3)}(y|\xi)$$

dove

$$\mathcal{R}^T_{(1)}(y|\xi) := \sum_{t=0}^{T_0-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u; \xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u)$$

$$\mathcal{R}^T_{(2)}(y|\xi) := \sum_{t=T-T_0+1}^{T-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u; \xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u)$$

e il termine $\mathcal{R}^T_{(3)}(y|\xi)$ è definito come:

$$\mathcal{R}^T_{(3)}(y|\xi) = \mathcal{R}^T_{(3,1)}(y|\xi) + \mathcal{R}^T_{(3,2)}(y|\xi)$$

dove

$$\mathcal{R}^T_{(3,1)}(y|\xi) := \sum_{B:\beta(B)\cap\Delta_T=\emptyset} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u;\xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u)$$

$$\mathcal{R}^T_{(3,2)}(y|\xi) := \sum_{B:\beta(B)\cap\Delta_T\neq\emptyset} \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,x|\xi) \sum_u c(u;\xi_t(x)) P_0^{T-t-1}(y-x-u)$$

e

$\Delta_T := [T_0, T-T_0]$

$B := \{(\tau_0, x_0), \ldots, (\tau_{n-1}, x_{n-1})\} \quad \text{con} \quad n = |B|$

$\beta(B) := \{\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}\}$.

La dimostrazione del teorema si articola quindi in tre parti a cui corrispondono tre lemmi che qui vengono enunciati e la cui dimostrazione è contenuta nel terzo capitolo della tesi.

Lemma 0.6 $\forall\nu \geq 1$ *, scelte le costanti* $K > 0$ *e* $\beta \in (0, \frac{1}{6})$*, per tutte le successioni* $y_T = y$ *tali che* $|y - bT| \leq KT^{\frac{1}{2}+\beta}$ *, se* ϵ *è sufficientemente piccolo, si ha che*

$$\frac{\mathcal{R}^T_{(1)}(y|\xi)}{P_0^T(y)} \to 0$$

per $T \to \infty$ *in* $L_2(\Pi_0)$.

Lemma 0.7 *$\forall \nu \geq 1$, scelte le costanti $K > 0$ e $\beta \in (0, \frac{1}{6})$, per tutte le successioni $y_T = y$ tali che $|y - bT| \leq KT^{\frac{1}{2}+\beta}$, se ϵ è sufficientemente piccolo, esiste un funzionale $\widehat{\mathcal{M}}$ del campo a ritroso η tale che*

$$\frac{\mathcal{R}^T_{(2)}(y|\xi)}{P^T_0(y)} - \epsilon \widehat{\mathcal{M}} \left(\eta^{(T,y)} \right) \to 0$$

per $T \to \infty$ in $L_2(\Pi_0)$.

Lemma 0.8 *$\forall \nu \geq 1$, scelte le costanti $K > 0$ e $\beta \in (0, \frac{1}{6})$, per tutte le successioni $y_T = y$ tali che $|y - bT| \leq KT^{\frac{1}{2}+\beta}$, se ϵ è sufficientemente piccolo, si ha che*

$$\frac{\mathcal{R}^T_{(3)}(y|\xi)}{P^T_0(y)} \to 0$$

per $T \to \infty$ in $L_2(\Pi_0)$.

Si perviene così alla prova della validità del TLC locale per un modello di cammino aleatorio in un mezzo aleatorio fluttuante.

Bibliografia

[1] I.I.GIKHMAN, A.V.SKOROHOD:
The theory of stochastic processes. (Springer-Verlag, 1974-79, vol.I)

[2] C.BOLDRIGHINI, R.A.MINLOS, A. PELLEGRINOTTI:
Almost-sure central limit theorem for a Markov model of random walk in dynamical random environment. (Probability Theory and Related Fields 109, 245-273, Springer-Verlag, 1997)

[3] C.BOLDRIGHINI, R.A.MINLOS, A.PELLEGRINOTTI:
Almost-sure Central Limit Theorem for Directed Polymers and Random Corrections. (Commun. Math. Phys. 189 ,533-557, Springer-Verlag, 1997)

[4] NEY,P. :
Dominating points and the asymptotics of large deviations for random walk on $\mathbb{R}^d$. (Ann. Prob. Vol. 11, 158-167 ,1983)

[5] BARNDORFF-NIELSEN, O.:
Information and Exponential Families in Statistical Theory. (Wiley, New York ,1978)

[6] ROCKAFELLAR, R.T.:
Convex Analysis. (Princeton University Press ,1970)

[7] W.RUDIN:
Analisi Reale e Complessa. (Ed. Bollati Boringhieri, 1974)