UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Ricoprimento e Illuminazione di figure piane

Aspetti scientifici e didattici

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

presentata da Silvia Giovannini

Relatore: Prof. Rosanna Cruciani

Nel secolo scorso, a partire dagli anni trenta, sono stati posti e studiati problemi relativi alle figure convesse dello spazio euclideo; questi possono essere riguardati come problemi di tipo combinatorio nel senso che, come vedremo, per ogni figura si richiede di individuare un numero naturale che soddisfi certe proprietà relativamente alla figura.
Si tratta di problemi la cui risoluzione richiede, oltre i metodi propri della Geometria Euclidea, applicazioni delle nozioni di continuità e compattezza. Essi si presentano come proprietà delle figure semplici ma non evidenti (come la maggior parte delle proprietà che comunemente si considerano nello studio della Geometria Euclidea) la cui soluzione richiede spesso procedimenti laboriosi e piuttosto complessi.
Inoltre, per talune questioni, si hanno per ora soltanto congetture.
Generalmente non troviamo nei corsi di matematica delle nostre scuole secondarie nulla riguardante i temi da noi discussi, quali ad esempio il diametro

delle figure piane o il ricoprimento di una figura; eppure, a nostro avviso, come vedremo nella parte dedicata alla didattica, sono possibili interessanti considerazioni accessibili a tutti i livelli scolari. Certe proprietà delle figure hanno un carattere concreto e talvolta sono sorprendenti; ciò stimola gli allievi verso un impegno che assume l'aspetto di una vera e propria ricerca matematica.

Una nozione comune a tutti i problemi da noi affrontati è quella di *dividere* una figura in *parti più piccole*. Abbiamo analizzato differenti criteri per effettuare tale divisione.

Il nostro primo obiettivo è individuare il minimo numero di parti in cui una figura limitata F, avente diametro d, puó essere divisa, in modo che ogni parte abbia diametro minore di d e indichiamo tale numero con $a(F)$. Chiariamo cosa intendiamo dire con il termine *dividere* una figura F in parti. Questo significa che F è rappresentata come unione di suoi sottoinsiemi

$$F = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$$

con le H_i per $i = 1, \ldots n$ figure chiuse tali che mai due di esse abbiano in comune punti interni.

La determinazione del valore $a(F)$ risulta immediata per alcune figure, che possono essere descritte con i mezzi della Geometria Euclidea, quali ad esempio un'ellisse (non circolare) che può essere divisa in due parti di diametro più piccolo tagliandola con la retta che contiene l'asse minore. Proviamo che questo non è possibile per un cerchio, per il quale risulta $a(F) = 3$.

Infatti sia C un cerchio di diametro d e $C = F_1 \cup F_2$ una divisione di C nel senso detto; se una delle due figure contiene tutta la circonferenza allora chiaramente essa ha diametro d; altrimenti esisterà un punto A della circonferenza ad esse comune; il punto della circonferenza simmetrico di A apparterrà ad F_1 o ad F_2 (eventualmente ad entrambe) e quindi una delle due figure ha diametro d.

Il matematico polacco Karol Borsuk, pose il problema di determinare $a(F)$ per ogni figura F di uno spazio euclideo n-dimensionale e nel 1933 fornì una soluzione completa per $n = 2$.

Per le figure piane, si ha il seguente risultato:

Ogni figura piana di diametro d, può essere divisa in tre parti di diametro

più piccolo; cioè $a(F) \leqslant 3$.
Inoltre, Borsuk dimostrò che per una sfera n-dimensionale $a(F) = n+1$, mentre per le figure n-dimensionali, ipotizzò che $a(F) \leqslant n+1$.
Nel 1955, il matematico inglese Eggleston dimostrò tale congettura per $n = 3$.
Per $n > 3$ il problema di Borsuk non è ancora risolto.
Il Teorema di Borsuk per $n = 2$ si dimostra facilmente dopo aver provato che ogni figura piana F di diametro d può essere inclusa in un esagono regolare i cui lati paralleli sono distanti d in quanto è possibile dividere tale esagono in tre parti ciascuna avente diametro minore di d e tale partizione dividerà F in tre parti di diametro più piccolo.
Il teorema non fornisce una soluzione completa al problema di determinare i possibili valori assunti da $a(F)$, ma fornisce soltanto un estremo superiore per $a(F)$: $a(F) \leq 3$. Per quali figure è $a(F) = 3$?
A tal proposito esamiamo le proprietà delle figure di ampiezza costante che ci permettono di stabilire un metodo di valutazione per $a(F)$ e risolvere così il quesito. Per definire una figura di ampiezza costante, è necessaria la nozione di *retta di supporto per una figura F*. Data una qualsiasi figura piana F, una retta l è detta *retta di supporto per F*, se contiene almeno un punto di frontiera per F e tutta la figura giace in uno dei due semipiani chiusi, individuati da l. Per ogni retta l, la distanza tra le due rette di supporto per F parallele a l, si dice *ampiezza di F nella direzione di l*. Una figura F è di *ampiezza costante* se possiede, in ogni direzione, la stessa ampiezza.
Le figure di ampiezza costante godono di alcune interessanti proprietà che possono essere così riassunte: sia F una figura di ampiezza costante h, allora la distanza tra due punti qualunque di F non supera h, il segmento che unisce i punti di contatto di due rette parallele di supporto per F è perpendicolare alle due rette ed ha lunghezza h, qualsiasi retta di supporto per F interseca F in un solo punto.
Risulta allora evidente che: *una figura di ampiezza costante h ha diametro uguale a h.*
Qualsiasi figura di diametro d può essere inclusa in una figura di ampiezza costante d.
Alla luce di queste proprietà possiamo determinare per quali figure $a(F) = 3$.
Nel 1969, V. G. Boltyankii raggiunse il seguente risultato:

Sia F una figura di diametro d, $a(F) = 3$ se e solo se F può essere inclusa in un solo modo, in una figura di ampiezza costante d.
Sia F una figura di diametro d; definiamo la *d-estensione di F* che denotiamo con F^*, l'intersezione di tutti i dischi di raggio d contenenti F. *Per ogni figura piana limitata F, $a(F) = a(F^*)$.*
Da ciò deduciamo che: *Se F è una figura di diametro d, allora $a(F) = 3$ se e solo se F^* ha ampiezza costante d.*
Essendo F^* la d-estensione di F, le seguenti affermazioni sono equivalenti:
a) $a(F^*) = 3$
b) $(F^*)^* = F^*$
c) $a(F) = 3$.
Nella seconda parte del lavoro consideriamo il problema di determinare per una figura F piana, convessa e limitata, il minimo numero di *copie ridotte* di F che sono necessarie per ricoprirla interamente e indichiamo tale numero con *b(F)*. Più precisamente, l'uguaglianza $b(F) = m$, significa che esistono m figure $F_1, F_2, \ldots, F_m$, ottenute da F tramite m omotetie, ciascuna con coefficiente di dilatazione minore di uno, la cui unione ricopre tutta la figura F; inoltre questo numero è il minimo esistente, cioè un numero di figure inferiore a m non è sufficiente a ricoprire F.
Il problema di determinare quali valori possa assumere $b(F)$, è stato posto e risolto da I. Ts. Gokhberg e A. S. Markus nel 1960 (in realtà, anche se in forma differente, il problema era già stato considerato dal matematico tedesco Friedrich Levi).
Il problema di ricoprire una figura per mezzo di sue copie ridotte, può essere formulato in maniera differente, tramite il problema di Borsuk, che riguarda, come sappiamo, la divisione di una figura in parti di diametro più piccolo.
Sia G una figura contenuta in una figura convessa F. La parte G di F, ha *massa k*, se esiste una figura F' contenente G, trasformata di F tramite un'omotetia di coefficiente k, e tale coefficiente è il minimo possibile.
Ovviamente se G coincide con F, la sua massa è uno. Se G non coincide con F, ha massa minore o uguale a uno, ma non necessariamente strettamente minore di uno. Una figura G, contenuta in una figura convessa F, si dice *parte di massa più piccola*, se la sua massa è strettamente minore di uno.
Utilizzando il concetto di massa, possiamo riformulare la definizione della

quantità $b(F)$: $b(F)$ *è il minimo numero di parti di massa più piccola in cui una figura convessa F può essere divisa.*

Si vede facilmente che questa definizione è equivalente a quella data in precedenza; supponiamo infatti che $F_1, F_2, \dots, F_m$ siano copie ridotte di F, la cui unione ricopra F. Denotiamo con $G_1, G_2, \dots, G_m$ le parti di F ottenute dalle figure $F_1, \dots, F_m$. È evidente, che ciascuna di queste parti, ha massa minore di uno. Per questo, se una figura F può essere ricoperta da m copie ridotte, allora essa può essere divisa in m parti di massa più piccola. Viceversa, se F può essere divisa in m parti $G_1, \dots, G_m$ di massa più piccola, allora esistono le copie ridotte $F_1, \dots, F_m$ di F contenenti rispettivamente le parti $G_1, \dots G_m$. Queste figure formano un ricoprimento di F tramite sue copie ridotte.

Per questo *il problema di ricoprire una figura convessa F con sue copie ridotte* può anche essere formulato come *il problema di dividere la figura F in parti di massa più piccola.*

In questa forma è molto forte la reminiscenza del problema di Borsuk. Il legame tra questi problemi non è affatto superficiale. Infatti, se la figura F ha diametro d, allora un'omotetia di F con coefficiente k, ha diametro kd; perció, se una parte di una figura convessa ha massa più piccola, ha anche diametro più piccolo. Il contrario, in generale è falso; per esempio un triangolo equilatero inscritto in un disco F, è una parte di diametro più piccolo, ma la sua massa è uno. Quindi se una figura convessa può essere divisa in m parti di massa più piccola, allora è possibile sicuramente dividerla in m parti di diametro più piccolo, ma non vale il viceversa.

In altre parole, *per qualsiasi figura convessa*:

$$a(F) \leq b(F).$$

Il problema di dividere in parti di massa più piccola riguarda solo le figure convesse, mentre il problema di Borsuk di dividere in parti di diametro più piccolo, è valido per tutte le figure.

La determinazione dei valori di $b(F)$ può essere più o meno immediata a seconda della figura considerata. Nel 1960 i matematici Gokhberg e Markus dimostrarono il seguente risultato che fornisce un criterio per determinare $b(F)$:

Per ogni figura F, piana, convessa e limitata, che non sia un parallelogramma, $b(F) = 3$; se F è un parallelogramma allora $b(F) = 4$.
Introduciamo una nuova definizione per le figure convesse:
Sia F una figura convessa e siano A e B due suoi punti di frontiera. Il segmento AB, si dice *corda massima* di F, se ogni corda parallela e distinta da AB è strettamente minore di AB.
In generale se l_1 e l_2 sono due rette parallele di supporto per la figura convessa F, ciascuna delle quali ha soltanto un punto di contatto con F, allora il segmento che collega i punti di contatto è una corda massima di F. *Qualsiasi figura convessa, eccetto il parallelogramma, ha almeno tre corde massime.*
Lo studio delle corde massime e delle sue proprietà ci permette di dimostrare il risultato ottenuto da Gokhberg e Markus.
Analizziamo poi un altro problema della teoria delle figure convesse, il problema di illuminazione, che come vedremo, è strettamente correlato con i problemi precedenti. Sia F una figura piana, convessa e limitata; sia $\vec{l}$ una direzione orientata nel piano di questa figura. Un punto A, di frontiera per F, si dice *punto di illuminazione relativo alla direzione* $\vec{l}$, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
1) La retta p, con direzione l, passante per A, non è una retta di supporto per la figura F (cioè esistono punti interni di F appartenenti a p).
2) Il punto A è il primo punto appartenente a F che si incontra muovendosi lungo la retta p, nella direzione $\vec{l}$ (ogni punto $P \in p$ tale che $P \leq A$ non appartiene a F).
Si dice *regione di illuminazione relativa alla direzione* $\vec{l}$ l'insieme dei punti di illuminazione nella direzione $\vec{l}$. Si dice che le direzioni $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \dots, \vec{l_m}$ *illuminano* la frontiera di F, se ogni punto della frontiera di F è un punto di illuminazione relativo ad almeno una direzione tra queste. Denotiamo con *c(F)* il minimo numero naturale m tale che esistono m direzioni nel piano che illuminano la frontiera di F. Nel 1960 V. G. Boltyanskii ha posto e risolto il problema di determinare i valori di $c(F)$, detto anche, *il problema di illuminazione della frontiera di F.*
Per ogni figura piana convessa F vale

$$c(F) \geq 3.$$

Nel problema di illuminazione, come nel problema di ricoprimento di una figura mediante sue copie ridotte, il parallelogramma gioca un ruolo particolare. Infatti abbiamo il seguente risultato:
Per ogni figura F piana, convessa e limitata che non sia un parallelogramma, $c(F) = 3$*; se F è un parallelogramma allora* $c(F) = 4$.
Confrontando i teoremi relativi al valore di $b(F)$ e di $c(F)$ ci si accorge subito che si ha:
Per ogni figura F convessa e limitata, vale $b(F) = c(F)$.
Questa uguaglianza è valida, non solo per le figure piane, ma anche per figure convesse nello spazio tridimensionale e persino in certi spazi di dimensione maggiore, come è stato dimostrato, sempre nel 1960, da V. G. Boltyanskii.
Le conseguenze di questo teorema sono rilevanti nello spazio tridimensionale, per il quale, le soluzioni dei problemi del ricoprimento e di illuminazione sono ancora sconosciute; dunque sarebbe sufficiente risolvere uno solo di questi problemi, essendo essi equivalenti.
Il problema di illuminazione, comunque, ha il vantaggio di essere più facilmente visualizzabile.
Per figure convesse illimitate, il problema di Borsuk, non ha più senso, dal momento che tali figure non hanno un diametro finito; mentre i problemi di illuminazione e di ricoprimento mediante copie ridotte, sono ancora ben posti.
Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, il teorema che asserisce l'uguaglianza dei numeri $b(F)$ e $c(F)$, non è valido per figure convesse illimitate. Un semplice esempio è fornito dalla figura convessa F limitata da una parabola P. La frontiera P di F, può essere illuminata con una direzione, cioè $c(F) = 1$, ma nello stesso tempo è impossibile ricoprire F con un qualsiasi numero finito di sue copie ridotte, cioè $b(F) = \infty$. Tuttavia esistono figure convesse illimitate per le quali $b(F)$ è finito. Per esempio, se F è una semistriscia allora $b(F) = 2$, osserviamo che in questo caso anche $c(F) = 2$ così che $b(F) = c(F)$.
Infine, esistono figure convesse illimitate per le quali i valori di $b(F)$ e $c(F)$ sono entrambi finiti, ma sono diversi. Per esempio, se F giace all'interno di una striscia determinata da due rette parallele e la frontiera di F approssima l'estremità della striscia, non appena ci si muove lungo una delle direzioni

parallele alle rette che definiscono la striscia. In questo caso, è facile mostrare che $b(F) = 2$ e $c(F) = 1$.

Dopo queste considerazioni, ci domandiamo: per quali figure convesse illimitate è conservata l'uguaglianza $b(F) = c(F)$? Per quali figure convesse illimitate il valore di $b(F)$ è finito? Esistono figure convesse illimitate per le quali $c(F) = \infty$?

Queste questioni, hanno trovato risposta, grazie a P. S. Soltan e V. N. Vizitei. Inizialmente, mettiamo in risalto che la prima parte del teorema relativo all'uguaglianza dei valori di $b(F)$ e $c(F)$ rimane valido per figure convesse illimitate. La prima parte della dimostrazione rimane così inalterata e quindi: *per ogni figura F piana convessa e illimitata, vale la relazione*

$$c(F) \leq b(F).$$

Diamo alcune definizioni e formuliamo un teorema che risponde alla seconda questione.

Sia F una figura convessa illimitata e sia O un arbitrario punto interno di F. Considerando tutte le semirette con punto iniziale O che giacciono interamente in F, l'unione di tali semirette forma una figura convessa illimitata K. Si dice che K è una *regione angolare inscritta* della figura F, con vertice nel punto O.

Una figura convessa illimitata F si dice *quasi conica*, se esiste un numero (finito) r tale che qualche regione angolare inscritta K, ha distanza r da tutti i punti di F.

Per una figura F, convessa e illimitata, $b(F)$ è finito se e solo se F è " quasi conica ". Inoltre, per le figure F quasi coniche, $b(F)$ può assumere solo i valori uno e due.

In particolare, sia F una figura convessa illimitata quasi conica bidimensionale, non contenente alcuna retta; se le sue regioni angolari inscritte sono semirette, allora $b(F) = 2$; altrimenti $b(F) = 1$. Infine, se F contiene una retta, allora può essere una striscia, un semipiano o un piano, in questi casi, $b(F)$ assume rispettivamente i valori 2, 1 e 1.

La determinazione dei valori di $b(F)$ per le figure convesse illimitate è così completa.

Infine esaminiamo dal punto di vista didattico alcuni temi già discussi. Il nostro scopo è fornire spunti per lo studio di proprietà delle figure piane limitate. L'assenza di questo tipo di considerazioni nei programmi delle nostre scuole è forse giustificato dal fatto che le nozioni di continuità e compattezza sono trattate soltanto nell'ultima classe di qualche tipo di scuola superiore. A questo proposito riteniamo che, per sviluppare la problematica trattata, alcune nozioni di base quali quella di diametro di una figura, di retta di supporto ... possano essere accettate anche senza una definizione rigorosa, facendo riferimento a figure familiari quali i poligoni ed il cerchio. Non abbiamo tralasciato aspetti molto elementari e situazioni molto semplici che abbiamo però ritenuto significative e didatticamente valide.

Riferimenti bibliografici

[1] V. G. Boltyanskii, I. Ts. Gohberg, *The Decomposition of Figures into Smaller Parts*, The University of Chicago, 1980. Traduzione e adattamento dall' edizione russa.

[2] V. G. Boltyanskii, I. Ts. Gohberg, *Teorems and Problems in Combinatorial Geometry*, Nauka, 1965.

[3] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press 1988.

[4] H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, New York, Holt, Rinehart, Winston 1964.

[5] I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskii, *Convex Figures*, New York 1961. Traduzione e adattamento dall' edizione russa.

[6] S. R. Lay, *Convex sets and their applications*, Pure and applied Mathematics, John Wiley and Sans Inc. 1982.