UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Le origini del concetto di birapporto

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di Simona Flavoni

Relatore: Prof. Franco Ghione

Classificazione AMS : 51A05, 5103.
Parole Chiave : geometria proiettiva, storia della geometria.

In questa tesi abbiamo cercato le origini di alcuni concetti fondamentali della geometria proiettiva attraverso lo studio dettagliato dei testi classici dove queste idee sono state per la prima volta esposte: si tratta dei lavori dei matematici Menelao, Pappo e Desargues.
Menelao, matematico greco vissuto nel secolo *I* d.C., si occupò principalmente dello studio della geometria sferica, a cui ha dedicato un trattato composto da tre libri intitolato appunto la 'Sferica' che ci è giunto in versione latina grazie a Maurolico (1494-1575) e Halley (1656-1724).
Pappo d'Alessandria, matematico vissuto probabilmente nel secolo III d.C., è autore di una 'Collezione matematica' in otto volumi, il primo e il secondo dei quali sono andati perduti.
Girard Desargues, matematico francese vissuto nel secolo XVII a Lione, fu uno dei fondatori della moderna geometria proiettiva. Nel 'Brouillon Pro-

ject' [4] del 1639 egli fornisce una presentazione proiettiva della teoria delle coniche, e mediante nozioni nuove di carattere proiettivo da lui introdotte riduce al piano considerazioni di origine spaziale. Questo lavoro non incontrò però molto successo, anche a causa del linguaggio e del simbolismo difficili. Più tardi Poncelet riconoscerà il valore dell'opera di Desargues, riprendendola e continuandola.

Abbiamo studiato questi autori analizzando le fonti dirette ([2], [3], [4]) e, confrontandole tra loro, abbiamo visto come teoremi simili vengano affrontati in maniere differenti; ad esempio in Pappo e in Desargues si trovano dei teoremi uguali le cui dimostrazioni sono però diverse, nella misura in cui Desargues utilizza il Teorema di Menelao, invece Pappo non lo prende in considerazione e ogni volta si serve di una parallela ausiliaria ed effettua tutto il ragionamento che Desargues sottintende grazie all'utilizzo del teorema di Menelao.

Il concetto iniziale della geometria proiettiva è sicuramente quello di rapporto armonico che nasce nella scuola Pitagorica, sviluppato in particolare da Filolao e Archita nel secolo v a.C. in relazione allo studio della musica.

Nel primo capitolo studiamo la 'Sferica' di Menelao; iniziando da un teorema fondamentale per il nostro studio che è il Teorema di Menelao nella versione piana e sferica. La trattazione di Menelao è sorprendentemente sviluppata in un ambiente curvo (la geometria della sfera) senza riferimenti, a noi noti, ad analoghe costruzioni di geometria piana. È dubbio se Menelao avesse o no un modello piano ora perduto a cui riferirsi o se invece la necessità di fare a meno del concetto di parallelismo, improponibile nell'ambito della geometria sferica, l'abbia portato per la prima volta ad introdurre questi concetti di geometria proiettiva. Diamo alcune nozioni introduttive per poter interpretare il lavoro di Menelao; lavoro teso ad evidenziare le analogie presenti tra la geometria della sfera e quella del piano. Per poter capire questo parallelo iniziamo col chiederci come si trasformano le definizioni di alcuni elementi semplici ed essenziali in geometria piana come le rette. Per fare questo osserviamo che l'intersezione di un piano con una sfera è un cerchio il cui raggio è dato da $R = \sqrt{r^2 - h^2}$, dove r è il raggio della sfera e h è la distanza del piano dal centro della sfera. Osservato questo diamo la definizione di **cerchio massimo** sulla sfera: questo sarà, ovviamente, un cerchio ottenuto intersecando la sfera con un piano che passa per il suo centro; il cui raggio

$R = r$ risulterà appunto massimo. Possiamo definire le **‘rette’** sulla sfera come i cerchi massimi. Abbiamo bisogno anche dell’analogo dell’angolo, che sulla sfera è l’**angolo sferico**; cioè l’angolo tra due ‘rette sferiche’, vale a dire l’angolo diedro formato tra i due piani che individuano le due ‘rette’. Quest’angolo è uguale all’angolo formato dai vettori tangenti ad esse nel loro punto di intersezione A:

Infatti i vettori essendo tangenti agli archi a e b in A sono tangenti alla sfera e quindi sono ortogonali all’asse AO. A questo punto possiamo definire il triangolo sferico, che è un triangolo formato da tre archi di ‘rette sferiche’.([1]) Cominciamo col dare alcune definizioni di base:

Definizione 1. *Dati tre punti allineati A,B,C il loro* **rapporto semplice***, denotato con (A, B, C), è quel numero reale che esprime il rapporto, con segno, della lunghezza del segmento AC rispetto al segmento BC:*

$$(A, B, C) = \frac{AC}{BC}$$

Il segno è da intendersi positivo se i vettori rappresentati dai segmenti AC e BC sono orientati nella stessa direzione, negativo in caso contrario.

Definizione 2. *Dati quattro punti allineati A,B,C,D il loro* **birapporto***, denotato con (A, B, C, D), è quel numero reale che esprime il rapporto, con segno, del rapporto semplice (A, B, C) rispetto al rapporto semplice (A, B, D):*

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$$

Definizione 3. *Una* **quaterna armonica** *è una quaterna di punti allineati A,B,C,D per cui vale:*

$$(A, B, C, D) = -1$$

[1] Menelai Sphaericorum libri III, traduzione latina di Halley 1758, ed. Costard. ‘Triangulum sphaericum est spatium comprehensum sub arcubus circolorum magnorum in superficie sphaerae.’

Possiamo enunciare ora il seguente teorema:

Teorema 1 (Menelao-piano). *Dato un triangolo $AB\Gamma$ e una trasversale $\Gamma'A'$ allora:*

$$(A, B, \Gamma') \cdot (B, \Gamma, A') \cdot (\Gamma, A, B') = 1$$

e viceversa; cioè dati tre punti Γ' sulla retta AB, A' sulla retta $B\Gamma$ e B' su quella $A\Gamma$ se

$$(A, B, \Gamma') \cdot (B, \Gamma, A') \cdot (\Gamma, A, B') = 1$$

allora i tre punti sono allineati

Il Teorema di Menelao-piano è in un certo senso una generalizzazione del Teorema di Talete che riguarda i rapporti tra segmenti relativi ad un triangolo tagliato da una trasversale; infatti se si fa tendere B' all'infinito, si ha che (Γ, A, B') tende a 1. Quindi il prodotto $(A, B, \Gamma') \cdot (B, \Gamma, A') \cdot (\Gamma, A, B') = 1$ tenderà, al limite, a $(A, B, \Gamma') \cdot (B, \Gamma, A') = 1$. Cioè si ha l'enunciato del Teorema di Talete.
La teoria delle similitudini può in un certo senso essere svolta là dove manchi il concetto di parallelismo con l'uso del Teorema di Menelao. Sarà così infatti sia per Menelao, che sviluppa la geometria intrinseca della sfera, che per Desargues che fonda la geometria proiettiva. Un'ulteriore importante definizione di cui abbiamo bisogno è la seguente:

Definizione 4. *Data un'orientazione nel piano e in questo tre semirette* $OA, OB, O\Gamma$ *uscenti da uno stesso punto O, e tagliate in A, B, e* Γ *da un cerchio di raggio r possiamo definire il rapporto semplice dei seni degli angoli come*

$$sin(A, B, \Gamma) = \frac{sinA\hat{O}\Gamma}{sinB\hat{O}\Gamma}$$

Dove l'angolo $sinA\hat{O}\Gamma$ *sarà l'angolo ottenuto andando da A verso* Γ *ruotando in senso positivo.*

Osserviamo che questo rapporto non dipende né dal raggio r né dal verso di rotazione scelto. Lo strumento fondamentale di cui si serve Menelao è il celebre 'Teorema di Menelao sferico' ('Sferica' proposizione 1 del libroIII), che in un qualche modo estende il Teorema di Talete, non più proponibile là dove, come nella geometria sferica, non ci sia una teoria delle parallele.

Teorema 2 (Menelao-sferico). *Se un triangolo sferico* $AB\Gamma$ *e tre punti* Γ' *su* AB*,* A' *su* $B\Gamma$ *e* B' *su* $A\Gamma$ *allora*

$$sin(A, B, \Gamma') \cdot sin(B, \Gamma, A') \cdot sin(\Gamma, A, B') = 1$$

se e solo se Γ', A', B' *sono allineati.*

La proposizione seguente esprime la 'proprietà armonica' di uno speciale fascio di quattro cerchi massimi, cioè mostra che in questo particolare fascio di rette, comunque si prenda una trasversale $A\Gamma$ verranno sempre individuati quattro punti formanti un rapporto armonico.

Teorema 3 (Proposizione VIII del libro III). *Dato un triangolo $AB\Gamma$ qualunque, sul lato $A\Gamma$ si prendano due punti E e Δ, allora si ha*

1. *Sia l'angolo $A\hat{B}\Gamma$ retto e valga $E\hat{B}A = A\hat{B}\Delta$ allora*
$$sin(\Gamma, A, E, \Delta) = -1$$
2. *Se vale $sin(\Gamma, A, E, \Delta) = -1$ ed $E\hat{B}A = A\hat{B}\Delta$ allora l'angolo $A\hat{B}\Gamma$ è retto.*
3. *Se vale $sin(\Gamma, A, E, \Delta) = -1$ e l'angolo $A\hat{B}\Gamma$ è retto allora gli angoli $E\hat{B}A$ e $A\hat{B}\Delta$ sono uguali.*

Abbiamo già detto come il Teorema di Menelao sia uno strumento fondamentale, infatti tramite questo teorema si può anche dimostrare l'invarianza del rapporto armonico per proiezioni in geometria sferica:

Lemma 4. *Siano (A, Γ, E, Φ) quattro allineati punti sulla sfera tali che $sin(A, \Gamma, E, \Phi) = -1$. Se i punti (A', Γ', E', Φ') sono ottenuti dai precedenti tramite proiezione, allora si ha che: $sin(A', \Gamma', E', \Phi') = -1$.*

Menelao utilizza questo lemma per dimostrare che in un triangolo sferico le tre altezze si incontrano in un punto. Ciò che Menelao usa è il fatto che quattro 'rette' di cui le prime due formano un angolo retto e le altre due sono bisecate dalla prima, tagliate da una qualunque trasversale, individuano quattro punti in rapporto armonico e viceversa.

Teorema 5 (Proposizione X del libro III). *Dato un qualunque triangolo sferico $AB\Gamma$, le tre altezze si incontrano tutte in uno stesso punto.*

Nel secondo capitolo prendiamo in esame le proposizioni di Pappo d'Alessandria inerenti la geometria proiettiva con i prerequisiti da lui elaborati. Analizzaremo il libro VII della 'Collezione matematica' perché è quello in cui si riscontra la nascita del concetto di birapporto, che in questo caso è ciò che a noi interessa. Anche se Pappo non ne fa menzione esplicita vedremo che, tra le righe, si cela questo concetto. Alcuni storici della scienza come Loria ([2]) e Kline ([3]) pensano di aver trovato all'interno della dimostrazione della proposizione 5 della 'Sferica' di Menelao anche la nozione di birapporto. Secondo noi (capitolo 1, paragrafo 3) non si può dire che nella proposizione 5 si evidenzi in modo particolare questa nozione, tanto da poter affermare che si debba attribuire all'opera di Menelao, e in particolare a quella proposizione, la nascita dell'idea di birapporto. Rielaboreremo le proposizioni di Pappo e vedremo come si può evidenziare il concetto di birapporto, di rapporto armonico e vedremo come alla base delle dimostrazioni ci sia l'idea che viene usata per dimostrare il 'Teorema di Menelao'. Inspiegabilmente però Pappo non fa mai riferimento esplicito a questo teorema; ciò risulta strano perché, come metteremo in evidenza, con quel risultato si semplificano le dimostrazioni e soprattutto si evidenziano alcune costruzioni che nel testo di Pappo sono un po' nascoste. All'interno di quel nucleo di proposizioni ritroviamo il concetto di rapporto armonico in un contesto di geometria piana, e il Teorema sul quadrangolo completo (proposizione 130-libroVII) che consente di costruire per via geometrica il quarto armonico.

[2]G.Loria [5], pp. 515 'La dimostrazione di tale proposizione (la 5), nota grazie a Halley e Maurolico, è notevole perché poggia sopra l'invariabilità per proiezione del doppio rapporto di quattro punti di un circolo massimo, ammessa come già nota (tale proprietà pu dedursi dal teorema di Menelao sulla sfera; essa non si ritrova che in opere uscite nel sec. XIX). Ma al dire di Bjornbo, assai pi interessante era la dimostrazione originale, se non altro perché prova che il cosí detto teorema di Menelao era conosciuto prima.'

[3]M.Kline [6], pp.142 'Il teorema 5 del libro III usa una proprietà degli archi che era presumibilmente nota ai tempi di Menelao, e cioè che se quattro archi di cerchio massimo hanno origine da un punto O e se A, B, C, D e A', B', C', D' sono cerchi massimi che li tagliano, allora: $\frac{sinAD}{sinDC} \cdot \frac{sinBC}{sinAB} = \frac{sinA'D'}{sinD'C'} \cdot \frac{sinB'C'}{sinA'B'}$. Vedremo che un'espressione simile al primo o al secondo membro della precedente uguaglianza ricompare sotto il concetto di rapporto anarmonico o birapporto nell'opera di Pappo e nei successivi lavori di geometria proiettiva.'

Teorema 6 (del quadrangolo completo, proposizione 130 del libro VII). *Dato il quadrangolo $H\Theta K\Lambda$, e una trasversale r, siano: A l' intersezione tra r ed il prolungamento del lato $K\Lambda$, Γ e Δ le intersezioni tra r ed i prolungamenti dei lati opposti $K\Theta$ e $H\Lambda$, B ed E le intersezioni tra r ed i prolungamenti delle diagonali KH e $\Theta\Lambda$. Allora un punto Z della retta r sarà allineato con H e Θ se e solo se $(Z, \Delta, A, E) = (Z, B, A, \Gamma)$*

Enunciamo un importantissimo teorema, che è alla base di molte dimostrazioni, e che è un elemento fondamentale della geometria proiettiva, perché ci garantisce che il birapporto è un invariante della geometria proiettiva.

Teorema 7. (Invarianza del birapporto per proiezioni, proposizione 129 del libro VII)
Date tre rette di un fascio $AB, A\Gamma, A\Delta$ e due trasversali r_1 e r_2 che si incontrano in Θ, siano rispettivamente E ed H le proiezioni di B e Δ da A allora $(\Theta, \Gamma, B, \Delta) = (\Theta, Z, E, H)$ se e solo se Z è la proiezione di Γ da A su ΘH.

Pappo dimostra un'ulteriore proposizione (proposizione 136 del libro VII), che sostanzialmente dice che il birapporto tra quattro punti è invariante per proiezioni anche se il punto da cui si proietta è interno alle due rette. Nel nostro lavoro questa distinzione non ha molto senso, perché con le dimostrazioni analitiche, o usando il Teorema di Menelao, si vede che il punto da cui si proietta è ininfluente.

Infine il ‘Teorema di Pappo’, che può essere formulato come un caso particolare del Teorema di Pascal sull’esagono.

Teorema 8 (di Pappo, proposizione 139 del libro VII). *Siano le rette $\Gamma\Delta$ e AB incidenti in un punto N, su queste due rette scegliamo sei punti, come in figura, formanti un esagono, allora si ha che i punti H, M, K sono allineati.*

Il terzo capitolo analizza la prima parte dell’opera di Desargues [**?**], in particolare sviluppando il concetto di involuzione, e del legame tra involuzione e birapporto. Prima di descrivere i teoremi analizzati da Desargues, è necessario introdurre una nuova convenzione per le rette parallele. Desargues inizia osservando che i punti di una circonferenza, le rette di un fascio, i punti di una retta sono entità dello stesso ‘genre’ (genere) purché si aggiunga alla retta un ‘punto all’infinito’. Poiché ogni retta del piano ha il suo ‘punto all’infinito’, la sua direzione, l’insieme di queste direzioni forma una nuova retta: ‘la retta all’infinito’ che è quella dove si incontrano le parallele; l’orizzonte dei pittori rinascimentali. In questo contesto, usando la proiezione stereografica, le simmetrie del cerchio si trasferiscono ad altrettante simmetrie della retta. La simmetria rispetto al centro che non ha punti fissi:

e quella rispetto ad un diametro che ha due punti fissi:

si trasportano ad altrettante simmetrie sulla retta. Per spiegare la corrispondenza tra le rette parallele Desargues aggiunge un punto alla retta ordinaria che chiama **punto all'infinito**. La retta ordinaria con in più il punto all'infinito sarà chiamata la **retta completata**. Il punto all'infinito deve essere aggiunto ai punti ordinari delle rette e deve essere considerato come punto comune ad un fascio di rette. Quindi ogni insieme di rette parallele avrà in comune un punto all'infinito; siccome ci sono infiniti insiemi di questo tipo la convenzione introdotta da Desargues fa sì che siano introdotti infiniti punti nel piano. Desargues stabilisce anche il fatto che questi nuovi punti introdotti giacciono su un'unica retta: **la retta all'infinito**. In questo modo aggiunge alle rette del piano euclideo una nuova retta. I teoremi della geometria euclidea non vengono contraddetti dall'aggiunta di questo punto all'infinito, però è richiesto un cambio di terminologia. Le rette non parallele si incontrano in punti ordinari, cosa che succede anche in geometria euclidea, la novità sta però nel fatto che ora le rette parallele si incontrano in questo nuovo punto che è stato introdotto: nel punto all'infinito. Con questa costruzione Desargues considera le due estremità della retta come coincidenti, cioè la retta per lui ha la struttura di un cerchio. Oltre al cerchio e alla retta completata un altro elemento importante per Desargues sono i fasci di rette, anch'essi sono assimilati al cerchio e alla retta completata tramite la proiezione stereografica.

Diamo ora una definizione che caratterizza tutta l'opera di Desargues:

Definizione 5. *Data una retta orientata, fissato un punto O,detto sorgente, si dice che i punti P e P' fanno parte di un'* **involuzione** *se $OP \cdot OP' = h$, dove OP e OP' sono segmenti orientati ed h è una costante non nulla.*

Se $h > 0$ abbiamo due punti fissi, nessuno se $h < 0$. P' si dirà coniugato (o corrispondente) di P nella data involuzione e se P è l'origine il suo coniugato è il punto all'infinito.

Desargues legò il concetto di involuzione al concetto di birapporto con il seguente teorema di caratterizzazione:

Teorema 9. *Sei punti* $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma'$*, su una retta, stanno in involuzione se e solo se* $(A, A', B, \Gamma) = (A, A', \Gamma', B')$ *o equivalentemente se* $(\Gamma, \Gamma', A, B) = (\Gamma, \Gamma', B', A')$ *o se* $(B', B, A, \Gamma) = (B', B, \Gamma', A')$

Tale teorema mostra come l'involuzione non sia legata alla sorgente; e da tale teorema si ricava inoltre che:

Teorema 10. *Se i punti* A, A, B, B, C, D *fanno parte di una involuzione allora* $(A, B, C, D) = -1$

Il concetto di involuzione, che è un invariante proiettivo, permetterà di ritrovare il concetto di rapporto armonico, di birapporto e le diverse proprietà trovate da Menelao e da Pappo, ma in più essa sarà alla base di un nuovo sviluppo della teoria della polarità per le coniche, della dualità e delle trasformazioni quadratiche del piano. Infine due teoremi molto importanti del capitolo 3 sono il Teorema di Desargues e il Teorema di Pascal, importanti non solo per i concetti di proiezione, di punto all'infinito e di invarianza del birapporto all'interno di una conica, ma importanti per la teoria della dualità.

Teorema 11 (Desargues). *Se in un piano due triangoli $AB\Gamma$ e $A'B'\Gamma'$ sono posti in modo che le rette congiungenti i vertici corrispondenti si incontrano tutti nello stesso punto O allora i prolungamenti dei lati corrispondenti si incontrano in tre punti X, Y, Z allineati.*

Teorema 12 (Pascal). *I lati opposti di un esagono di vertici $ABCDEF$ inscritto in una conica irriducibile si incontrano in tre punti allineati.*

Notiamo che unendo il Teorema di Pascal con quello di Pappo possiamo dire che il 'Teorema dell'esagono' vale per una qualunque conica non doppiamente degenere.

Nel quarto capitolo infine esponiamo alcune animazioni scritte in futurbasic che è un linguaggio di programmazione a oggetti pensato in un ambiente Macintosh che permette una forte interazione utente-macchina particolarmente utile ai nostri scopi. Una versione essenzialmente equivalente a questo linguaggio è il visual-basic particolarmente pensato per il pc. Nelle pagine seguenti riportiamo, a livello dimostrativo, alcune schermate delle animazioni.

La prima animazione illustra il Teorema sul Quadrangolo completo, in questo caso sulla trasversale fissata, disegnata in nero, si evidenziano i sei punti che danno luogo all'uguaglianza dei birapporti.

La seconda animazione illustra il Teorema delle Quaterne armoniche, in questo caso la trasversale non è fissata, ma sarà la retta che passa per le intersezioni dei lati opposti e per le diagonali.

La terza animazione illustra ancora il Teorema delle Quaterne armoniche, in questo caso viene mostrato come si spostano i punti formanti la quatrerna armonica in relazione allo spostamento del quadrangolo. Si vede inoltre che il corrispondente del punto medio del segmento è all'infinto.

La quarta animazione illustra l'involuzione derivante dalla simmetria rispetto al centro del cerchio, in cui si vede che non ci sono punti fissi, e che il corrispondente della sorgente è il punto all'infinito.

La quinta animazione illustra l'involuzione derivante dalla simmetria rispetto al diametro del cerchio, in cui si vede che non ci sono due punti fissi, e che il corrispondente della sorgente è il punto all'infinito.

Bibliografia

[1] Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri 1994.

[2] Menelao di Alessandria *Sphaericorum libri III*,E. Halley, Oxford suntibus academicis 1758. Traduzione a cura dell'Università di Tor Vergata 1999.

[3] Pappo di Alessandria *Les collections methématiques. Oeuvre traduite pour la premi'ere fois du grec en francais, avec une introduction et des notes par di Paul Ver Eecke*, Blanchard 1982.

[4] Desargues *BROUILLON PROJECT d'une atteinte aux evénemens des rencontres d'un cone avec un plan par le sieur G. Desargues Lionais*, 1864. Edizione critica: *OEUVRE DE DESARGUES reunies et analizé par M. Poudra, vol I,II*, Leiber 1864.

[5] G.Loria *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Libraio Della Real Casa 1914.

[6] M.Kline *Storia del pensiero matematico*, traduzione a cura di Luca Lamberti, Giulio Einaudi 1991.

[7] Courant *Cos'è la matematica*, Boringhieri.

[8] Euclide *Ottica*, Di Renzo Editore 1996.

[9] Euclide *The thirteen books of the elements*, traduzione e note a cura di Sir Thomas L. Heat, Dover Publication 1956.

[10] Tolomeo *Ptolemy's Almagest, libro I*, capitolo 13, pag. 64, traduzione e note a cura di G.J. Toomer, Duckworth 1984.