

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

H-superfici

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di Marco Discendenti
Relatore: Prof. Giovanni Mancini

Lo studio di superfici minime e con curvatura media costante è un problema classico del Calcolo Variazionale che ha avuto una evoluzione significativa solo a partire dal 1930 con i lavori di Douglas e Radò sul problema di Plateau. Se Γ è una curva chiusa in \mathbb{R}^3 il problema di Plateau consiste nel determinare la superficie parametrizzata da un disco e con bordo Γ avente area minima. Le superfici minime sono caratterizzate dalla proprietà di avere ovunque curvatura media nulla, così una naturale generalizzazione del problema di Plateau è cercare superfici la cui curvatura media abbia ovunque un valore prefissato H o sia una prefissata funzione a valori reali su \mathbb{R}^3 . Come le superfici a curvatura nulla sono quelle che minimizzano l' area, le superfici a curvatura costante sono caratterizzate dalla proprietà di minimizzare l' area "racchiudendo" un volume fissato, ovvero minimizzare il rapporto area-volume. Una ulteriore generalizzazione del problema consiste nel trovare superfici la cui curvatura media è data da una funzione di curvatura H non costante sullo spazio tridimensionale. Questo tipo di problemi hanno anche un interesse fisico: è noto ad esempio una goccia d' acqua in un campo elettrico è vincolata ad avere una curvatura che in generale non è costante nello spazio mentre sappiamo che le posizioni di equilibrio delle lamine di sapone

sono tali da rendere minima l' area con determinati vincoli sul bordo o sul volume racchiuso.

Il problema si presta quindi ad un approccio variazionale in cui la ricerca di soluzioni per l' equazione differenziale che esprime le condizioni sulla curvatura media si riduce al problema di ricercare i punti di minimo o più in generale stazionari di una funzione $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un appropriato spazio funzionale X di parametrizzazioni di superfici, studiando la struttura topologica di E . Le principali difficoltà che si incontrano su questa strada sono dovute alla mancanza di compattezza delle successioni minimizzanti legata essenzialmente all' invarianza dei funzionali considerati rispetto a gruppi non compatti di trasformazioni (e ciò a causa della scelta della rappresentazione parametrica per le superfici).

Nella prima parte di questa esposizione ci occuperemo di superfici parametrizzate su un disco e vincolate ad avere come bordo una prefissata curva e per tali superfici deriveremo dei risultati di esistenza nel caso H costante (dovuti a Hildebrandt, Brezis, Coron). Più precisamente ci occuperemo in questa sezione di determinare l' esistenza di una soluzione $X(u, v)$ al problema differenziale

$$\begin{cases} \Delta X = 2HX_u \wedge X_v \text{ su } B \\ X(\partial B) = \Gamma \\ X_u \cdot X_v = 0 = |X_u|^2 - |X_v|^2 \end{cases} \quad (0.1)$$

L' approccio variazionale consiste nel considerare una generica parametrizzazione monotona γ della curva Γ e considerare inizialmente il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta X = 2HX_u \wedge X_v \text{ su } B \\ X = \gamma \text{ su } \partial B \end{cases} \quad (0.2)$$

le cui soluzioni possono essere trovate come punti critici del funzionale

$$E(X) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla X|^2 + \frac{2}{3} H \int_B X \cdot X_u \wedge X_v$$

sullo spazio affine $Y + H_0^{1,2}(B; \mathbb{R}^3)$ dove Y è una superficie tale che $Y = \gamma$ su ∂B ed è continua e debolmente monotona sul bordo; per avere soddisfatte le condizioni di conformalità sarà poi sufficiente cercare al variare di γ la soluzione X_γ di tipo appropriato che rende X_γ stazionario per E rispetto a riparametrizzazioni della superficie. Una prima soluzione ‘piccola’ al problema (0.1) è ottenuta cercando una X che sia minimo locale per E , ed esiste sotto l’ ipotesi $|H| \sup \{|x| : x \in \Gamma\} < 1$. Una seconda soluzione ‘grande’ si ottiene, nell’ ipotesi in cui esista la prima soluzione, come punto di sella di E , sfruttando la struttura ‘cubica’ del funzionale E .

Vedremo poi le superfici di tipo ‘disco’ per H non costante per le quali Caldiroli e Musina in [C-M] hanno dimostrato l’ esistenza in condizioni molto generali per H e sotto l’ ipotesi che sia realizzata una stima sull’ energia dell’ estensione armonica del dato al bordo γ dipendente da H . In particolare si avrà che per $H \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ non identicamente nulla esisterà una soluzione ogni volta che l’ integrale di Dirichlet dell’ estensione armonica del dato al bordo è strettamente minore di $\frac{4\pi}{3} \|H\|_\infty^2$.

Nella parte finale vedremo i principali risultati relativi alle superfici parametrizzate da una sfera nel caso H costante - completamente risolto dal lavoro di Brezis Coron [B-C2] che hanno dimostrato che tutte e sole le soluzioni sono parametrizzazioni di sfere di raggio $1/|H|$ - e nel caso H non costante su cui hanno lavorato Caldiroli e Musina in [C-M2]. Il caso H non costante è molto delicato in quanto ai già citati problemi di non-compattatezza si aggiungono

il problema di avere un funzionale di energia E ben definito, il problema della limitatezza delle successioni di Palais Smale, la non continuità del differenziale $d\mathcal{E}_H$ rispetto alla topologia debole. La tecnica usata per ovviare a questi problemi prende spunto da un lavoro di Sacks e Uhlenbek [S-U] e si basa sulla approssimazione del funzionale E con funzionali che non presentano particolari problemi per quanto riguarda ricerca dei punti critici, e sull'analisi del comportamento della successione dei punti critici di tali funzionali. Il risultato che si ottiene riguarda l'esistenza di una H -superficie di energia minima quando $H \in C^1(\mathbb{R}^3)$ verifica le seguenti ipotesi sul suo comportamento all'infinito

- (i) $M_H := \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |(\nabla H(x) \cdot x)x| < 1$
- (ii) $\exists H_\infty \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} H(tx) = H_\infty \forall x \in \mathbb{R}^3$

ed il livello "critico" dell'energia E_H associata ad H è strettamente minore del livello critico dell'energia E_{H_∞} associata alla funzione costantemente uguale ad H_∞ . Grazie a questo teorema si potrà vedere un esempio di funzione H a simmetria radiale su \mathbb{R}^3 per cui esiste una H -superficie di energia minima limitata non radiale, senza che si possa dire nulla in generale sulla sua posizione.

Bibliografia

- [C-M] R. MUSINA, P. CALDIROLI, *Existence of minimal H -bubbles*, preprint Sissa, Trieste (2000).
- [C-M2] R. MUSINA, P. CALDIROLI, *On a Steffen's result about parametric surfaces with prescribed mean curvature*, preprint Sissa, Trieste (2000).
- [Stru] M.STRUWE, *Plateau's problem and the calculus of Variations*, Mathematical Notes **35**, Princeton University press (1985).
- [B-C] H.BREZIS, J.M.CORÒN, *Multiple solutions of H -Systems and Rellich Conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. **37**, (1984), pp 149-187.
- [B-C2] H.BREZIS, J.M.CORÒN, *Convergence of solutions of H -System or how to blow bubbles*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89**, (1985), pp 21-56.
- [Mor] C. MORREY, *Multiple Integrals in Calculus of Variations*, Springer-Verlag, second edition, 1983.
- [S-U] J. SACKS, K. UHLENBECK, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. Math. **113** (1981), pp 1-24.

- [Wen] H. WENTE, *The differential equation $\Delta x = 2x_u \wedge x_v$ with vanishing boundary values*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), pp 113-137.
- [Wen2] H. WENTE, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), pp 318-334.
- [Cou] E. COURANT, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience New York (1950).
- [Stef] K. STEFFEN, *Isoperimetric Inequalities and the problem of Plateau*, Math. Ann. **222** (1976), pp 97-144.
- [Stef2] K. STEFFEN, *On existence of surfaces with prescribed mean curvature and boundary*, Math. Z. **146** (1976), pp 113-135.
- [Stru2] M. STRUWE, *Variational Methods*, Springer (1990).