UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Alessandro Cheloni

Metodi variazionali nello studio di sistemi Hamiltoniani

Relatore
Prof. Giovanni Mancini

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
Luglio 2002

Classificazione AMS: 70H05 58E05 37J45
Parole chiavi: Sitemi Hamiltoniani, metodi variazionali, orbite periodiche, orbite omocline, orbite eterocline

La meccanica Hamiltoniana costituisce uno dei capitoli più affascinanti della Matematica ed è all'origine di teorie assai sofisticate. Sebbene sin dai tempi di Euler e Maupertuis i principi variazionali siano stati centrali nello sviluppo della meccanica Hamiltoniana, questi metodi sono rimasti relativamente marginali rispetto allo sviluppo di altre teorie come, ad esempio, la Teoria K.A.M..

In tempi più recenti, stimolata, in parte, dalla ricchezza di idee e risultati dei metodi geometrici e perturbativi, e in connessione con lo sviluppo della Teoria dei Punti Critici, i metodi variazionali hanno portato a nuovi e originali risultati nello studio dei sistemi Hamiltoniani.

La prima area di applicazione dei metodi globali del calcolo delle variazioni nei sistemi Hamiltoniani riguarda la ricerca di orbite periodiche, mentre sono più recenti gli sviluppi nella ricerca delle orbite di connessione.

In questa tesi si vuole proporre una breve panoramica dei principali metodi del calcolo delle variazioni e una rilettura di alcuni importanti risultati riguardanti lo studio dei sistemi Hamiltoniani, tra cui, un famoso teorema di carattere locale dovuto a Weinstein ([36]).

Il capitolo 2 è dedicato alla teoria dei punti critici della quale vengono introdotti importanti strumenti quali, i metodi diretti e i metodi di minimax, tra cui, il "Passo di Montagna", il "Linking" e il più recente "metodo perturbativo di Ambrosetti".

Il terzo capitolo affronta una problematica sulla quale si è scritto molto negli anni '70 e '80. Nel 1973 Weinstein dimostrò con metodi geometrici ([36]) che un sistema Hamiltoniano a n gradi di libertà possiede almeno n orbite periodiche su livelli di energia prossimi ad un equilibrio, premesso che la matrice Hessiana dell'Hamiltoniana nel punto di equilibrio in questione fosse definita positiva. In questo modo veniva generalizzato il celebre Teorema del Centro di Lyapunov eliminando l'ipotesi di non risonanza agli atovalori immaginari del linearizzato. Successivamente Moser, in [22], ridimostrò quanto ottenuto da Weinstein con metodi analitici e formulò un risultato analogo per sistemi conservativi in generale ottenendo almeno un'orbita periodica. Qui, nel paragrafo 3.2 della tesi, viene presentata una dimostrazione alternativa del teorema di Weinstein facendo uso degli strumenti introdotti nel capitolo 2. Quanto esposto nei paragrafi 3.5 e 3.6 sono, invece, i "corrispondenti globali" del teorema di Weinstein, il teorema di Ekeland-Lasry ([16]) e una successiva generalizzazione ([8]), che stabiliscono l'esistenza di almeno n orbite periodiche per sistemi Hamiltoniani a n gradi di libertà su livelli di energia qualsiasi, premesso che questi verifichino opportune condizioni geometriche.

Conclude la tesi un capitolo dedicato alle orbite omocline ed eterocline per sistemi Hamiltoniani del secondo ordine. Vengono, dapprima, brevemente riportati alcuni importanti risultati nell'ambito del calcolo delle variazioni e poi, trattati con qualche dettaglio, alcune applicazioni del metodo perturbativo di Ambrosetti ([3]) nella ricerca di orbite omocline e un recente ed elegante lavoro di Rabinowitz ([29]) sulle soluzioni di tipo multichain.

Orbite periodiche di energia assegnata per sistemi Hamiltoniani

Gli approcci nella ricerca di orbite periodiche di sistemi Hamiltoniani sono sostanzialmente due, quello di energia fissata e quello di periodo fissato. Nel capitolo 2 della tesi viene studiato quello di energia fissata. L'idea è di assegnare il valore dell'Hamiltoniana, diciamo $H(z) = 1$, e di cercare orbite periodiche sull'ipersuperfice $H^{-1}(1)$. La validità di questa impostazione sta nel fatto che le soluzioni dei sistemi Hamiltoniani conservano l'energia, ovvero, l'Hamiltoniana H è una costante del moto.

I primi risultati in questa direzione risalgono agli anni '50 e sono dovuti a Seifert (rif. Seifert[1] in [32]). Per i successivi venti anni non è stato scritto nulla di rilevante in merito, mentre negli anni '70-'80 è stata fatta una grande quantità di lavoro, sia con metodi analitici che con metodi variazionali.

Nel 1973, A. Weinstein ([36]), utilizzando gli stessi strumenti geometrici usati da Seifert venti anni prima, formulava il seguente importante teorema

Teorema 0.1. ***(Weinstein)***

Sia $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ tale che $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$ e $H''(0)$ sia definita positiva. Allora, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, il sistema

$$\dot{z} = JH'(z), \tag{H}$$

ammette almeno n orbite orbite periodiche su $H = \epsilon^2$ il cui periodo è prossimo a quello delle soluzioni del linearizzato in 0.

Successivamente, nel 1976, J. Moser ([22]) diede una nuova dimostrazione del Teorema 0.1 mediante strumenti analitici, ed estese il risultato a sistemi conservativi in generale, stabilendo l'esistenza di almeno un'orbita periodica su superfici di energia ϵ^2.

L'obiettivo del paragrafo 3.2 della tesi è di dare un'altra dimostrazione del Teorema 0.1 facendo uso di tecniche proprie dell'analisi funzionale. L'impostazione è di tipo perturbativo e consiste nel vedere la parte non lineare del problema come una "piccola" perturbazione di quella lineare. Supposto, quindi, che il linearizzato (cioè quello non perturbato) ammetta soluzioni periodiche non banali si cerca di capire quante di queste "sopravvivono" dopo la perturbazione.

Sebbene questa impostazione sia del tutto analoga a quella presente in [22], l'approccio al problema è decisamente diverso e prende spunto da un lavoro fatto da Mawhin e Willem in [21].

Il risultato appena descritto è di natura locale e vale in un ristretto intorno dell'origine. Le orbite periodiche che si trovano sono in effetti dette "piccole oscillazioni" proprio perchè giacciono su superfici di livello di energia ϵ^2, se ϵ è sufficientemente piccolo. La domanda che si pone è se valgono risultati di qualche tipo per ogni valore dell'energia, magari premesso che queste superfici soddisfino "qualche geometria" che nel caso locale risulta implicita. La risposta è positiva. Come visto, per perturbazioni sufficientemente piccole, nell'intorno di un equilibrio permangono piccole oscillazioni e per questi livelli di energia ci aspettiamo superfici piuttosto regolari come, ad esempio, stellate o anche convesse. Queste proprietà, o loro varianti, sono, almeno per ora, fondamentali per lo studio globale nella ricerca di orbite periodiche per sistemi Hamiltoniani.

I primi risultati in questa direzione risalgono al 1978 e sono dovuti a Rabinowitz ([28]) e Weinstein ([35]), in entrambi i quali si ottiene almeno un'orbita periodica. In [28] si suppone che il livello di energia in questione sia compatta e bordo di una regione stellata, in [35], con meno generalità, che il livello sia bordo di una regione convessa. Quanto dimostrato da Rabinowitz in [28] è il seguente teorema,

Teorema 0.2. ***(Rabinowitz)***

Sia $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Si supponga che per qualche $b \neq 0$, $H^{-1}(b)$ sia omeomorfa alla sfera S^{2n-1} mediante proiezione radiale e che $x \cdot H'(x) \neq 0$, per ogni $x \in H^{-1}(b)$. Allora il sistema (H) possiede almeno un'orbita periodica su $H^{-1}(b)$.

Riportiamo, per completezza, una congettura di Weinstein del 1979 ([34]), secondo la quale, ogni ipersuperfice *di contatto*, compatta, regolare e semplicemente connessa possiede almeno un'orbita periodica. In seguito C. Viterbo ha dimostrato la validità di questa congettura per superfici di contatto in $\mathbb{R}^{2n}$ ([33]) e, in collaborazione con H. Hofer e A. Floer, in fibrati cotangenti ([19]) e in $\mathbb{P} \times \mathbb{C}^l$ ([17]), rispettivamente.
Tuttavia, onde ottenere risultati di molteplicità, è necessaria un'altra condizione alla quale ancora non si è riusciti a "rinunciare" ed è chiamata condizione di "pinching" del livello di energia. Senza entrare nei dettagli, questa, nella versione meno generale presente in [16], impone che si possa racchiudere la superficie tra due sfere i cui raggi devono essere "abbastanza" vicini.
Nel paragrafo 3.5 della tesi viene trattato in dettaglio un risultato, dovuto ad Ekeland e Lasry ([16]), che ha rappresentato il primo vero passo verso una versione globale del Teorema 0.1 e che, nelle ipotesi di pinching sopra citate, prova l'esistenza di almeno n orbite periodiche distinte per sistemi Hamiltoniani ad n gradi di libertà su livelli di energia arbitrari.

Orbite di connessione per sistemi Hamiltoniani del secondo ordine

Nell'ultimo capitolo della tesi vengono descritti alcuni risultati riguardanti le orbite di connessione per sistemi Hamiltoniani. Il termine "orbite di connessione" in generale non ha un significato ben preciso, comunque, in questo contesto, si intendono soluzioni di un sistema di equazioni differenziali definite su tutto l'asse reale e con stati asintotici ben definiti, tipicamente, punti di equilibrio del sistema. La ricerca con metodi variazionali in questo ambito ha una storia relativamente recente e negli ultimi anni molto è stato scritto in merito.

Sostanzialmente, sono due i tipi di problemi affrontati, il primo riguarda la ricerca di soluzioni omocline o eterocline di base, il secondo, la ricerca di soluzioni "vicine" a somme formali o concatenazioni di queste orbite di base, dette soluzioni di tipo *multibump* o di tipo *multichain*.

È da sottolineare che le difficoltà che si incontrano in queste ricerche sono maggiori rispetto a quelle incontrate per le orbite periodiche. Il motivo principale sta nel fatto che si hanno ha disposizione meno proprietà di compattezza in quanto si ha a che fare con funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, o comunque su un intervallo illimitato di $\mathbb{R}$. Conseguenza di ciò, è che, in generale, non è verificata la condizione di *Palais-Smale*, e quindi non sono applicabili i metodi di minimax introdotti nel capitolo 2. Tuttavia, il fatto di lavorare su tutto $\mathbb{R}$, rende possibili i fenomeni multibump, deducibili da un'analisi accurata del comportamento delle successioni (P.S.).

Un'altra complicazione che si presenta in questo contesto riguarda le orbite eterocline, per le quali, non è ovvia la scelta dello spazio funzionale nel quale effettuare la formulazione variazionale, e spesso si presenta la necessità di modificare opportunamente il consueto funzionale poichè, i contributi degli stati asintotici possono renderlo infinito.

Il problema di trovare soluzioni omocline è stato affrontato sia dal punto di visto locale che globale. I primi lavori risalgono a Poincarè che, con metodi analitici, provò l'esistenza di tali orbite per sistemi periodici perturbati ad un grado di libertà (rif. [15] di [3]). Poincarè stabilì che in caso di intersezione trasversale tra la varietà stabile e quella instabile, esistono infinite orbite omocline. Nel caso di perturbazioni di sistemi Hamiltoniani autonomi, la condizione di trasversalità si può verificare tramite la funzione di Melnikov: l'esistenza di zeri semplici di questa funzione implica l'esistenza di intersezioni trasversali.

Uno dei primi risultati ottenuti mediante tecniche variazionali (1990) è quello di V. Coti Zelati, I. Ekeland e E. Sèrè ([11]), nel quale si dimostra l'esistenza di due orbite omocline geometricamente distinte per sistemi Hamiltoniani del primo ordine. Successive generalizzazioni di questo risultato sono dovute a Hofer e Wysocki (rif. [4] in [12]) e K. Tanaka (rif. [T2] in [24]). Motivato dal lavoro fatto in [11], Sèrè ha in seguito mostrato ([31]) che lo stesso sistema, nelle stesse ipotesi, possiede infinite soluzioni omocline geometricamente distinte.

Contemporaneamente a V. Coti Zelati, I. Ekeland e E. Sèrè, P. H. Rabinowitz ha mostrato ([26]), mediante convergenza di *subarmoniche*, l'esistenza di un'orbita omoclina per sistemi Hamiltoniani del secondo ordine del tipo

$$\ddot{q} + V'(q) = 0, \tag{HS}$$

con $q \in \mathbb{R}^n$.

Negli anni successivi l'attenzione si è spostata maggiormente nella ricerca delle multibump. Tra gli altri, rilevanti risultati sono stati ottenuti da Rabinowitz e Coti Zelati ([12]) per potenziali superquadratici e da P. Caldiroli e P. Montecchiari ([10]) per potenziali che non hanno segno costante.

Sebbene le tecniche tipiche dello studio dei sistemi dinamici sembrino evidentemente differenti da quelle variazionali, nel 1996 A. Ambrosetti e M. Badiale mostrarono ([3]) come di fatto queste sono collegate, nel senso di come un appropriato uso della Teoria dei Punti Critici permetta anche di provare classici risultai dei metodi perturbativi. L'impostazione astratta descritta nel paragrafo 2.4.8 della tesi è quella presente in [3] e alcune delle sue applicazioni sono esposte nel paragrafo 4.3. Lo stesso approccio utilizzato in [3] è stato poi esteso da M. Berti e P. Bolle in [9] per provare l'esistenza di soluzioni di tipo multibump per la stessa classe di sistemi.

Conclude la tesi un recente risultato ottenuto da P. H. Rabinowitz e V. C. Zelati ([29]) nell'ambito della ricerca di soluzioni di tipo multichain per sistemi Hamiltoniani non autonomi del secondo ordine,

$$\ddot{q} - V_q(t, q) = 0, \tag{HS}$$

con $q \in \mathbb{R}^n$. Il termine "multichain" deriva dal fatto che queste soluzioni si trovano a partire da una catena formale di orbite omocline e/o eterocline che connettono punti di equilibrio del sistema, dati da massimi locali del potenziale. Nel 1993 ([25]) Rabinowitz già trovava di fatto soluzioni multichain per una classe di sistemi Hamiltoniani del secondo ordine. I punti chiave di quel risultato erano due: il primo, di trovare orbite omocline ai punti di massimo relativo del potenziale e orbite eterocline che connettono questi punti; il secondo, di capire a fondo il comportamento delle successioni di Palais-Smale. Lungo delle estratte queste si comportano, per la maggior parte dei tempi, come "pezzi" delle eterocline e omocline già trovate. Intuitivamente, un opportuno completamento di questo "puzzle" di curve darebbe luogo a soluzioni omocline o eterocline di (HS). Costruendo apposite funzioni approssimanti di *catene omocline* ed *eterocline*, si riesce a stabilire l'esistenza di infinite orbite omocline ed eterocline vicine alle catene, via un apposito teorema di deformazione.

Il risultato presentato nei paragrafi 4.5 e 4.6 della tesi ha un approccio solo in parte simile a quello descritto. Il potenziale considerato è periodico nello spazio e lentamente oscillante nel tempo. La periodicità nello spazio, per grandi linee, ci garantisce la presenza di un reticolo di massimi locali del potenziale e l'utilizzo di tecniche ormai standard (presenti, ad esempio, in[30] e [27]) ci consente di trovare orbite eterocline che connettono i nodi del reticolo.

Fissata una catena finita di orbite, il Teorema 4.18 stabilisce l'esistenza di una eteroclina che connette il punto di partenza della catena al punto finale, mentre apposite stime indipendenti dal numero di nodi e argomenti di compattezza sono il fulcro della dimostrazione del Teorema 4.19 che stabilisce l'esistenza di un'orbita non eteroclina a partire da una catena illimitata sui due fronti.

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, *Variational methods and nonlinear problems: classical results and recent advances*, Prog. in Nonlinear Diff. Eq. Appl. (15), Birkhäuser, 1995, pag. 1-36.

[2] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems*, Suppl. Bull. Soc. Math. de France (120), 1992.

[3] A. Ambrosetti, M. Badiale, *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*, Ann. Inst. Henri Poincarè (15), 1998, pag. 233-252.

[4] A. Ambrosetti, V. Coti Zelati, I. Ekeland, *Symmetry breaking in Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq. (67), 1987, pag. 165-184.

[5] A. Ambrosetti, G. Mancini, *On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic Hamiltonian trajectories*, J. Diff. Eq. (43), 1982, pag. 249-256.

[6] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer in nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (34), Cambridge University Press, 1995.

[7] V. Benci, *A geometrical index for the group S^1 and some applications to the study of periodic solutions of ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. (34), 1981, pag. 393-432.

[8] H. Berestycki, J. M. Lasry, G. Mancini, B. Ruf, *Existence of multiple periodic orbits on star-shaped Hamiltonian surfaces*, Comm. Pure. Appl. Math. (74), 1985, pag. 253-289.

[9] M. Berti, P. Bolle, *Homoclinics and chaotic behaviour for perturbed second order systems*, to appear.

[10] P. Caldiroli, P. Montecchiari, *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems with potential changing sign*, S.I.S.S.A., 12/94/M, 1994.

[11] V. Coti Zelati, I. Ekeland, E. Sèrè, *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Ann. (288), 1990, pag. 133-160.

[12] V. Coti Zelati, P. H. Rabinowitz, *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potential*, J. Am. Math. Soc., (v.4, n.4), 1991, pag. 693-727.

[13] G. F. Dell'Antonio, B. D'Onofrio, *On the number of periodic solutions of a Hamiltonian system near an equilibrium point*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6, 3, 3), 1984, pag. 809-835.

[14] B. D'Onofrio, I. Ekeland, *The index theory for a class of Hamiltonian systems that are not positive definite*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sèr. I Math. (305, 6), 1987, pag. 249-251.

[15] I. Ekeland, *Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem by P. Rabinowitz*, J. Diff. Eq. (34), 1979, pag. 523-534.

[16] I. Ekeland, J. M. Lasry, *On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface*, Ann. Math. (112), 1980, pag. 283-319.

[17] A. Floer, H. Hofer, C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in* $\mathbb{P} \times \mathbb{C}^l$, Math. Z. (203), 1990, no.3, pag. 469-482.

[18] B. Fortune, *A symplectic fixed point theorem for* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, Inv. Math. (81, no.1), 1985, pag. 29-46.

[19] H. Hofer, C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in cotangent bundles and related results*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4, 15), 1998, no.3, pag. 411-445.

[20] L. Ljusternik, L. Schnirelman, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationelles*, Actualites Sci. Industr. (188), 1934, Paris.

[21] J. Mawhin, M. Willem, *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Applied Mathematical Sciences 74, Springer-Verlag, 1989.

[22] J. Moser, *Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein*, Comm. Pure Appl. Math. (29), 1976, pag. 727-747.

[23] P. H. Rabinowitz, *Connecting orbits for a class of reversible Hamiltonian systems*, preprints.

[24] P. H. Rabinowitz, *Critical point theory and applications to differential equations: a survey*, Prog. Nonlinear Diff. Eq. Appl. (15), Birkhäuser, 1995, pag. 464-513.

[25] P. H. Rabinowitz, *Homoclinic and heteroclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Calc. Var. (1), 1993, pag. 1-36.

[26] P. H. Rabinowitz, *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Proc. Royal Soc. Ed. (114A), 1990, pag. 33-38.

[27] P. H. Rabinowitz, *Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system*, Ann. Inst. Henri Poincarè (v.6, n.5), 1989, pag. 331-346.

[28] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. (31), 1978, pag. 157-184.

[29] P. H. Rabinowitz, V. Coti Zelati, *Multichain-type solutions for Hamiltonian systems*, Nonl. Diff. Eq., Electron.J. Diff. Eq., Conf. 05, 2000, pag. 223-235.

[30] P. H. Rabinowitz, K. Tanaka, *Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems*, Math Z. (206), 1991, pag. 473-499.

[31] E. Sèrè, *Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Z. (209), 1992, pag. 27-42.

[32] M. Struwe, *Variational methods*, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems (34), Springer, 1990.

[33] Viterbo C., *A proof of Weinstein's conjecture in* $\mathbb{R}^{2n}$, Ann. Inst. Henri Poincarè (v.4, n.4), 1987, pag. 337-356.

[34] A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorem*, J. Diff. Eq. (33), 1979, pag. 353-358.

[35] A. Weinstein, *Periodic orbits for convex Hamiltonian systems*, Ann. Math. (2, 108), 1978, pag. 507-518.

[36] A. Weinstein, *Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems*, Inv. Math. (20), 1973, pag. 47-57.