UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Metodi Semi Lagrangiani non oscillatori di ordine alto per equazioni di Hamilton Jacobi

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di Elisabetta Carlini

Relatore: Prof. Roberto Ferretti

Oggetto di studio della tesi è l'equazione iperbolica non lineare di primo ordine di Hamilton-Jacobi in $\mathbb{R}^2$; in particolare si analizza e approssima una forma di essa, nota come equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.
Varie sono le motivazioni applicative che rendono interessante il suo studio. La soluzione è strettamente legata alla teoria del controllo ottimo, noto per le sue molteplici applicazioni in campo fisico ed economico. Altre interessanti applicazioni sono la propagazione iconale dei fronti e la ricostruzione di immagini (shape-form-shading).
Da un punto di vista numerico l'interesse è dovuto al fatto che essa si può considerare un problema modello per equazioni a derivate parziali non lineari: su questa si basa una buona parte della teoria numerica di questo tipo di equazioni.
Caratteristica principale dell'equazione H-J è di non possedere, in generale, soluzioni regolari, anche quando i dati del problema lo sono. Nei primi anni '80 nasce la teoria delle soluzioni viscosità, che caratterizza e individua una classe di soluzioni ancora attualmente oggetto di studio e interesse. I

principali scritti su questa teoria sono dovuti a M.G.Crandall, P.L.Lions e L.C.Evans.
La soluzione di queste equazioni assume dunque un estremo interesse ed i problemi ad essa connessi sono oggetto di studio da vario tempo. Le tecniche numeriche utlizzate per l'approssimazione per lo più sono basate sui metodi alle differenze e ad elementi finiti. I primi derivano dagli schemi per leggi di conservazione, ma è noto che i metodi alle differenze finite tradizionali producono buoni risultati in spazi di funzioni regolari mentre approssimando funzioni discontinue presentano una notevole viscosità o fenomeni oscillatori, rispettivamente con metodi di primo ordine o superiori. I secondi si basano sull'aggiunta di un termine di 'viscosità artificiale', tale che l'equazione diventi parabolica; è così possibile applicare i metodi ad elementi finiti ma è inevitabile la dipendeza della velocità di convergenza da tale coefficiente.
Quindi lo scopo che ci si è posti è quello di ottenere schemi con bassa diffusione e ordine alto di consistenza. La tecnica specifica da noi utilizzata è quella dei metodi di Godunov a grandi passi in tempo (o semilagrangiani) con ricostruzione spaziale di ordine alto. L'idea di base dei metodi semilagrangiani è quella di ricostruire la soluzione sopra una griglia integrando numericamente la soluzione lungo le rette caratteristiche.
Notevole vantaggio di questi metodi è quello di non essere vincolati dalla condizione di Courant-Friederchs-Levy (CFL) sul passo temporale.
In particolare l'obiettivo che ci siamo prefissati in questo contesto è stato quello di progettare un software per la realizzazione dell'approssimazione dell'equazione di HJB su un dominio bidimensionale, verificando l'efficienza della tecnica ENO(essentialy non oscillatory), che sostituisce l'usuale interpolata polinomiale con un'interpolata basata su stencils scelti passo per passo, in modo tale da evitare appunto le oscillazioni presenti negli schemi di ordine alto.
Il nostro interesse si è concentrato anche nello studio di una particolare proprietà di queste soluzioni: la semiconcavità. Abbiamo verificato che soluzioni approssimate di problemi con dato iniziale solo semiconcavo e con proprietà di convessità dell'hamiltoniana dell'equazione, possono essere approssimate con alto grado di precisione, mentre problemi con dato iniziale che non gode della proprietà di semiconcavità risentono della bassa precisione dell' ap-

prossimazione del dato iniziale.

Nel primo capitolo presentiamo il problema e la formula di rappresentazione della soluzione partendo da un approccio classico per poi approdare allo spazio delle soluzioni deboli viscose, dove inseriamo la visione controllistica del problema tramite la quale daremo la dimostrazione analitica della validità della formula di rappresentazione.
Il capitolo viene concluso da esempi di soluzioni esatte che danno un quadro esaustivo della classe di soluzioni tipiche per il nostro problema.
Oggetto del secondo capitolo è l'approssimazione numerica. A partire dalla verifica del principio della programmazione dinamica discreta analizziamo lo schema che approssima la soluzione in tempo, passiamo quindi alla discretizzazione spaziale e concludiamo, dimostrando quando è possibile, qualche risultato di convergenza.
L'ultimo capitolo è dedicato ai test numerici: si parte dalle prove sugli esempi di soluzioni esatte proposti e i primi due test verificano il risultato riguardante la proprietà di semiconcavità prima accennato. Gli ultimi test riguardano la propagazione dei fronti, in particolare proponiamo due esempi su superfici differenziabili non piane.

1 Soluzioni viscosità continue per l'equazione di Hamilton-Jacobi

Questo capitolo è dedicato alle soluzioni viscosità continue dell'equazione di Hamilton-Jacobi evolutiva [1]

$$(HJ) \qquad F(X, v(X), Dv(X)) = 0 \qquad X \; in \; \Omega \times [0,T] \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

dove Ω é un dominio aperto di $\mathbb{R}^N$ e l'hamiltoniana $F = F(X, r, p)$ è una funzione continua a valori reali su $\mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N+1}$.
Speciale attenzione dedicheremo al caso in cui F è della forma:

$$F(X, v(X), Dv(X)) = v_t(x,t) + \lambda v(x,t) + H(x,t,\nabla v(x,t)) \qquad (1)$$

[1] $Dv(x,t) = (\nabla v(x,t), v_t(x,t))$ e ∇ indica la derivazione lungo le sole coordinate spaziali

e in particolare quando $p \to H(x,t,p)$ è convessa, nel qual caso l'equazione prende nome di *Hamilton-Jacobi-Bellman*.
La teoria che considerereo é in realtá formulata per un equazione ancora piú generale:

$$\begin{cases} v_t(x,t) + \lambda v(x,t) = H(x,t,\nabla(x,t) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}[f(x,t,\alpha) + b(x,t,\alpha)\cdot\nabla v(x,t)] \\ v(x,0) = v_0(x)\ , \quad \mathbb{R}^N \times (0,T) \end{cases} \tag{2}$$

con $f : \mathbb{R}^N \times [0,T] \times A \to \mathbb{R},\ b : \mathbb{R}^N \times [0,T] \times A \to \mathbb{R}^N,\ v_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \longmapsto A,\ \alpha(\cdot)\ misurabile\}$. Con l'ipotesi di limitatezza e lipsichitzianità di $b(\cdot,\cdot,\alpha)$, di limitatezza e hölderianità di $f(\cdot,\cdot,\alpha)$ e $v_0(\cdot,\alpha)$, di continuità di $b(x,s,\cdot)$ e $f(x,s,\cdot)$ e sotto l'ipotesi ulteriore che $v \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, (2) ha soluzione formale

$$v(x,t) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\int_0^t\ f(y(\xi), t-\xi, \alpha(t-\xi))e^{-\lambda\xi}\, d\xi + e^{-\lambda t}v_0(y(t))\right\} \tag{3}$$

$$x \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T]$$

con $y(\cdot)$ soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{y}(\xi) = b(y(\xi), t-\xi, \alpha(t-\xi)) \quad \xi \in [0,t] \\ y(0) = x\ . \end{cases} \tag{4}$$

La soluzione (3) di (2) necessita dell'ipotesi $v \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Tale ipotesi è alquanto restrittiva: pur partendo da dati iniziali, funzione costo e funzione sistema dinamico assai regolari si arriva facilmente a soluzioni non piú C^1.È necessario quindi passare alla teria debole.

Definizione 1. *Una funzione continua v è* **soluzione viscosità** *dell'equazione differenziale non lineare (1) se sono verificate le seguenti condizioni:*

(j) $\forall\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{N+1})$, se X è un punto di massimo locale per $v - \varphi$, allora $F(X, v(X), D\varphi(X)) \le 0$;

(jj) $\forall\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{N+1})$, se X è un punto di minimo locale per $v - \varphi$, allora $F(X, v(X), D\varphi(X)) \ge 0$.

Le soluzioni viscosità godono della proprietà di verificare l'equazione differenziale quasi ovunque:

Proposizione 1. *[BCD]*

(a) *Se* $v \in C(\Omega \times [0,T])$ *è soluzione viscosità di (1), allora* $F(X, v(X), Dv(X)) = 0$ *per ogni* X *tale che* v *è differenziabile in* X*;*

(b) *se* v *è localmente lipschitziana ed è soluzione viscosità di (1), allora* $F(X, v(X), Dv(X)) = 0$ *q.o.*

L'unicità della soluzione viscosità di (HJB) è garantita dal seguente teorema:

Teorema 2. *[L] Se* $v_1, v_2 \in BUC\ (\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *sono soluzioni viscosità di (HJB) allora* $v_1 = v_2$ *in tale intervallo.*

L'esistenza segue dalla formula di rappresentazione.
Passiamo quindi ai risultati di regolarità. Diamo la definizione di funzioni semiconcave, una classe di funzioni che per la nostra equazione differenziale gode di proprietà particolari.

Definizione 2. *Una funzione* $v : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ *si dice semiconcava in* $\mathbb{R}^{N+1}$ *se esiste una costante* $c \geq 0$ *tale che*

$$\mu v(x) + (1-\mu)v(y) \leq v(\mu x + (1-\mu)y) + \frac{1}{2}c\mu(1-\mu)|x-y|^2$$

per ogni $x,\ y$ *in* $\mathbb{R}^{N+1}$ *e* $\mu \in [0,1]$.

I principali risultati sulle soluzioni semiconcave utili nel contesto di questa tesi sono i seguenti:

Proposizione 3. *[BCD] Se* v *è semiconcava in* Ω*, allora per ogni* $x \in \Omega$

(a) *o* $D^- v(x) = \emptyset$ *o* v *è differenziabile in* x ,

(b) *se* $D^+ v(x)$ *è un insieme formato da un solo elemento, allora* v *è differenziabile in* x .

Proposizione 4. *[CS] Sia $H(x,t,p)$ l'hamiltoniana del problema (1) tale che appartenga allo spazio $C^2(\bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^N)$, sia convessa in p e verifichi*

$$\limsup_{R\to\infty} \left\{ \frac{H(x,t,p)}{|p|} :\ |p| = R,\ x \in \Omega \cup B_r,\ t \in [0,T] \right\} = \infty \text{ per ogni } r > 0 \ ,$$

$$H(x,t,p) \leq C_1(1 + exp(C_2|p|)) \ \text{ per ogni } x,t,p \text{ e } \ C_1, C_2 \text{ positive e}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial H(x,t,p)}{\partial p_i} - \frac{\partial H(x,t,p')}{\partial p_i} \right] [p_i - p'_i] \geq \beta_R |p - p'|^2 > 0$$
$$\text{per ogni } \ x,\ p,\ p' \ \in B_R \ .$$

Sotto queste ipotesi la trasformata di Legendre

$$H^*(x,t,q) = \sup_{p\in\mathbb{R}N} \{-p \cdot q - H(x,t,q)\}$$

è finita e convessa; inoltre supponiamo che verifichi

$$|H^*(x,t,q) - H^*(x',t',q)| \leq C(|x - x'| + |t - t'|)(H^*(x,t,q) + c)$$

per ogni x, x', t, t' e C, c costanti positive, infine sia $v(x,0) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e semiconcavo. Allora v è semiconcava in $\Omega \times [0,T]$.

L'idea fondamentale nata dietro la teoria dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman è la seguente: se v è sufficientemente regolare (HJB) è la versione infinitesimale di un' equazione funzionale, conosciuta come il *Principio della Programmazione Dinamica(PPD).*
Illustreremo ora il problema di controllo ottimo che con l'uso del *PPD* ci porterà direttamente alla formulazione di $v(x,t)$, soluzione dell'equazione alle derivate parziali (2).
Consideriamo un sistema di controllo, governato dall'equazione di stato:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = b(y(s), t-s, \alpha(t-s)) & s \in [0,t] \\ y(0) = x \ . \end{cases} \tag{5}$$

Il problema consiste nel minimizzare rispetto tutti i controlli ammissibili il seguente funzionale costo:

$$J(x,t,\alpha) = \int_0^t f(y(s), t-s, \alpha(t-s))e^{-\lambda s}\, ds + e^{-\lambda t} g(y(t)) \ . \tag{6}$$

Definiamo inoltre **funzione valore** la seguente funzione di x e t :

$$u(x,t) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x,t,\alpha) \ .$$

Enunciamo il già citato *Principio della Programmazione Dinamica* in avanti:

Teorema 5. *[BCD] (Principio della programmazione dinamica) Supponiamo vere le ipotesi su f e b prima enunciate, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < \tau \leq t$*

$$u(x,t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^\tau f(y(s), t-s, \alpha(t-s))e^{-\lambda s}\, ds + e^{-\lambda \tau} u(y(\tau), t-\tau) \right\} \ . \tag{7}$$

Essa è un fondamentale strumento per dimostrare il seguente teorema

Teorema 6. *[BCD] Assumendo le ipotesi del teorema precedente, la funzione valore è soluzione viscosità di*

$$v_t(x,t) + \lambda v(x,t) + H(x,t,\nabla v(x,t)) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,T] \ .$$

Proposizione 7. *[BCD] Supponiamo $b : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^N$ continua, limitata e lipschitziana in x e t , $f \in BC(\mathbb{R}^N \times [0,T] \times \mathcal{A})$ e lipschtziana in x e t, $\lambda \geq 0$* e *g limitata e lipschtziana allora*

$$u \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \ .$$

Dalla proposizione segue il risultato di unicità per la soluzione dell'equazione (HJB).

2 Soluzione numerica dell'equazione di Hamilton-Jacobi

L'approssimazione numerica di (HJ) che illustreremo usa schemi basati sul principio della programmazone dinamica discreto di tipo Semi-Lagrangiano.

Questo significa che la soluzione in ogni nodo del reticolo sarà calcolata assemblando un metodo numerico per EDO (per approssimare i punti up-wind rispetto i nodi), una formula di interpolazione (per calcolare il valore della soluzione in questi punti) e una procedura di minimizzazione.
La formulazione dell'algoritmo nasce dalla versione discreta del *PPD*. Ovvero dalla discretizzazione direttamente della soluzione.
Continueremo quindi a supporre vere le ipotesi di regolarità che garantiscono l'esistenza della soluzione debole del nostro problema. Illustriamo come primo passo la discretizzazione della nostra soluzione-funzione valore rispetto la sola variabile temporale.
Consideriamo quindi un passo di tempo $h = T/N$, dove N corrisponde al numero di iterazioni da effetuarsi per ottenere il risultato finale al tempo T.
Consideriamo lo schema a un passo, con più step discreti:

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\phi_b(y_j, h, A_j) \quad j = 1, N-1 \\ y_0 = x \ . \end{cases} \tag{8}$$

Dove A_j è una matrice $(2 \times q + 1)$, j-esimo elemento della successione di matrici di controlli ammissibili, le cui colonne sono denotate a_j^i e tali che $A_j = (a_j^0, ..., a_j^q)$.

Con la partizione temporale: $t_0 = 0, ..., t_N = T$.
Il costo discreto sarà definito nel seguente modo

$$J_h^N(x, T, A_j) := \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i \in I} hw_i f(y_{j+\tau_i}, T - t_j + \tau_i, a_j^i) e^{-\lambda h(j+\tau_i)} + u_0(y_N) e^{-\lambda T} \ , \tag{9}$$

con $I = \{1, ..., q\}$. Dove τ_i, w_i sono i nodi e i pesi di una formula di quadratura.
Il valore $y_{j+\tau_i}$ corrisponde all' i-esimo valore intermedio tra gli stati y_j e y_{j+1}.
La funzione valore relativa al problema introdotto è

$$u_h^N(x, T) := \inf_{\{A_j\}} J_h^N(x, T, A_j)$$

e il *PPD* discreto:

Proposizione 8. *[FF] Siano vere (8) e (9), siano $\phi_b(\cdot, t, A)$ e $\phi_f(\cdot, t, A)$ lipsichitziane e tali che verificano l'ipotesi di consistenza $\phi_b \to b$ e $\phi_f \to f$ pet*

$h \to 0$ *allora per ogni* $n = 1, ..., N$, u_h^N *verifica*

$$u_h^N(x,T) = \inf_{\{A_j\}} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i \in I} h w_i f(y_{j+\tau_i}, T - t_j + \tau_i, a_j^i) e^{-\lambda h(j+\tau_i)} + \right. \tag{10}$$

$$\left. + e^{-\lambda h n} u_h^{N-n}(y_N, T - t_n) \right\}$$

L'approssimazione (HJ_h) fornisce un'approssimazione temporale in forma generale del nostro problema.

Ora per la costruzione completa dell'algoritmo numerico abbiamo bisogno di calcorare la soluzione in un dominio limitato Ω, invece di $\mathbb{R}^N$. La discretizzazione spaziale di u_h è ottenuta costruendo una griglia su Ω con passo k e ponendo:

$$u_h^k(x,t_n) = \sum_{j \in D} u_j^n \psi_j(x) \ , \tag{11}$$

dove u_h^k è la discretizzaione spaziale di u_h, $D = \{1, ..., d\}$ è l'insieme degli indici dei nodi delle griglia x_j, e $\{\psi_j(x)\}_{j \in D}$ è una base di funzioni limitate. Definiamo un operatore di proiezione P_k come:

$$P_k u(x,t) := \sum_{j \in D} u(x_j, t) \psi_j(x) \ . \tag{12}$$

Possiamo inoltre assumere che per ogni u Lipschitz continua

$$\lim_{k \to 0} \|u - P_k u\|_\infty = 0 \ . \tag{13}$$

Dunque la discretizzazione diventa

$$\begin{cases} u_h^k(x_i,t_n) = \min_{\{A\}} \left\{ h\psi(x_i,t_n,A) + e^{-\lambda h} \sum_{j \in D} u_j^{n-1} \phi_j(x_i + h\phi_b(x_i,t_n,A) \right\} \\ \\ u_h^k(x_i,0) = u(x_i,0) \end{cases} \tag{HJ_h^k}$$

$i = 1, ..., D \qquad n = 0, ..., N$

2.1 Metodi Eno

ENO è la sigla per *'essentialy-nonoscillatory'*. Si tratta di metodi di interpolazione che mirano a contenere le oscillazioni che si formano quando usiamo

gli schemi precedentemente descritti vicino a punti dove la funzione da interpolare non è regolare.
I metodi ENO sono progettati appositamente per soluzioni regolari a tratti contenenti discontinuità.
L'algoritmo viene costruito inserendo ad ogni passo un punto alla volta nello stencil che, a differenza dei metodi a elementi finiti, è mobile e non fisso. La misura della regolarità della funzione è data dalla differenza divisa di Newton, che calcolo ad ogni passo sullo stencil 'mobile' scegliendo lo stencil che ha diferenza finita minore. Continuando in questo modo, ci arrestiamo quando giungiamo al numero di nodi necessari per il grado di accuratezza scelto, s. Concludiamo interpolando la funzione u su questo nuovo stencil attraverso la forma di Newton o equivalentemente di Lagrange.
proprietà degli schema ENO:
1.La condizione di accuratezza

$$p(x) = u(x) + O(k^s), \quad x \in I_i$$

è valida per ogni intervallo non contenente discontinuità.
2.La ricostruzione $p(x)$ è monotona in ogni intervallo non contenente discontinuità.
3.La ricostruzione ENO è TVB(variazione totale limitata); ossia esiste una funzione $z(x)$ tale che

$$z(x) = p(x) + O(k^s), \quad x \in I_i \ ,$$

per ogni intervallo I_i, inclusi quelli contenenti discontinuità, verifica

$$TV(z) \leq TV(u) \ .$$

2.2 Convergenza

Presentiamo il problema nel caso in cui l'insieme dei controlli $\mathcal{A}$ è costituito da un solo elemento: il problema si riduce ad un'equazone lineare:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \lambda u(x,t) - b(x,t)\nabla u(x,t) = f(x,t) & \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = v_0(x) \ . \end{cases} \tag{14}$$

Presentiamo un risultato sulla convergenza del problema lineare discretizzato completamente.

Teorema 9. *[F] Supponiamo lo schema a un passo sia di ordine p:*

$$|y(h) - x - h\phi_b(x,h)| \leq C_1 h^{p+1} \tag{15}$$

$$\Big| \int_0^h e^{-\lambda s} f(y(s), h-s)\, ds - h\phi_f(x,h) \Big| \leq C_2 h^{p+1} \ , \tag{16}$$

e siano vere le ipotesi di consistenza e lipschtzianietà di ϕ e $\{\psi_j(x)\}$ siano le funzioni base che verificano (11),(12),(13) .
Se $\|u(\cdot,t) - P_k u(\cdot,t)\|_\infty \leq E(k) \quad \forall t \in [0,\bar{t}]$ e se $\sum_{j\in D} |\psi_j(x)| \leq 1$, allora esiste una costante C tale che $\forall h \leq h_0$

$$\left\| u_h^k(\cdot,\bar{t}) - u(\cdot,\bar{t}) \right\|_\infty \leq C(h^p + \frac{1}{h}E(k)) \ .$$

Il seguente è invece un risultato sulla convergenza dello schema completamente discretizzato del problema non lineare in una formulazione più semplice della nostra equazione.

Teorema 10. *Sia $u(x,t) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ soluzione viscosità di*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + H(\nabla u(x,t)) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

con $p \to H(p)$ convessa e continua, $u_0(x)$ hölderiana e limitata e siano $\{\psi_j(x)\}$ le funzioni base che verificano (11),(12),(13) e l'ulteriore ipotesi $\|\psi_j(x)\|_\infty \leq 1$ allora

$$\|u_h^k(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_\infty \leq C\frac{k}{h} \ .$$

3 Test numerici

Dei vari test effettuati presentiamo una sintesi dei risultati dei due esempi significativi per la teoria delle soluzioni deboli semiconcave.

Equazione con Hamiltoniana strettamente convessa e con dato iniziale non semiconcavo.

Supponiamo di voler approssimare l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$u_t(x,y,t) + \sup_{\alpha \in \mathcal{R}^2} \left\{ \alpha \cdot \nabla u(x,y,t) - \frac{1}{2}|\alpha|^2 \right\} = 0 \ ,$$

con dato iniziale

$$u_0(x,y) = \begin{cases} 1 - (x^2 + y^2) & \text{se} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

Nelle prove effetuate abbiamo sempre utilizzato il metodo di Eulero di ordine 1 per l'approssimazione in tempo, poichè in questo problema le caratteristiche sono rette l'errore dovuto alla discretizzazione temporale è nullo.
L'approccio teorico ci suggerisce allora passi in tempo lunghi: un numero inferiore di integrazioni vuol dire meno interpolazioni, così l'errore dovuto alla discretizzazione spaziale dovrebbe diminuire con l'aumento del passo in tempo. Dai test si nota come questo non sempre avviene: l'errore di interpolazione del dato iniziale può essere tale da dominare su l'errore di discretizzazione totale. L'errore globale può essere descritto in questa forma

$$E(k,h) \geq \left(k + \frac{E(k)}{h} \right) \ ,$$

dove $E(k)$ rappresenta l'errore di interpolazione. Solo diminuendo il passo in tempo vedremo dominare il secondo termine della stima dell'errore. In conclusione non si apprezzano diminuzione dell'errore globale con l'utilizzo di metodi di ordine alto perché il dato iniziale non è sufficientemente regolare. Notevoli le prestazioni dei metodi Eno di grado 3 (figura(**??**))

rispetto ad un'approssimazione spaziale con i classici elementi finiti di terzo grado: l'effetto non oscillatorio permette una buona approssimazione vicino alle discontinuità anche con pochi nodi.

Equazione con hamiltoniana strettamente convessa e con dato iniziale semiconcavo

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) + \sup\limits_{\alpha \in \mathcal{R}^2} \left\{ \alpha \cdot \nabla u(x,y,t) - \frac{1}{2}|\alpha|^2 \right\} = 0 \\ u(x,y,0) = \min(\sqrt{x^2+y^2} - 1, 0) \ . \end{cases}$$

In questo caso abbiamo calcolato l'errore locale: le caratteristiche non prendono valori dalle zone di poca regolarità del dato iniziale, quindi non influenzano l'approssimazione di ordine alto nelle zone dove la soluzione è regolare. I risultati dei test locali sono ottimi già con P^2: ci troviamo ad approssimare una funzione quadratica e si intuisce l'errore dominante essere l'errore dovuto al calcolo del minimo. Gli errori in norma infinito mostrano che l'errore aumenta con il dimuire di h, fenomeno che a priori ci aspettiamo perché la stima dell'errore è del tipo $E(h,k) \leq C\left(\frac{k}{h}\right)$.
I test danno ottimi risultati: poichè le curve caratteristiche sono rette e la funzione costo è costante non si forma viscosità numerica nell'approssimzione temporale ovvero non stiamo producendo errori, inoltre nella fase di interpolazione ci troviamo ad approssimare una funzione quadratica ed anche in questa operazione l'errore è nullo a partire da interpolazioni con elementi P2. In conclusione l'unico errore è, nei casi di interpolazione sopra lineare, quello dovuto all'approssimazione del minimo (figura **??**).

Bibliografia

[BCD] M.Bardi,I.Capuzzo Dolcetta,*Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkäuser, (1997).

[B] H.Brezis,*Analisi funzionale*, Liguori Editore, Napoli,1990

[CS] P.Cannarsa,H.M.Soner,*On the Singularities of the Viscosity Solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Indiana University Mathematical Journal,Vol. 36, No.3 (1987).

[CD] I.Capuzzo Dolcetta,*On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming*, Appl.Math and Optim,**10**, (1983),367-377.

[C] E.A.Coddigton,*Theory of ordinary differential equation*,Mc Gran-Hill, New York,(1995).

[CIL] M.G.Crandall,H.Ishii e P.L.Lions,*User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equation*, Bull.Amer.Mah.Soc., **27**, (1992),pp.1-67.

[CL] M.G.Crandall,P.L.Lions,*Two approximation of solution of Hamilton-Jacobi-Equation*, Bull.Amer.Mah.Soc., **43**, (1984),1-19.

[F] M.Falcone,R.Ferretti,*Convergence Analysis for a class of High-Order Semilagrangian Advection schemes*, SIAM J.Num.Anal.,**35**, (1998), 909-940.

[FF] M.Falcone,R.Ferretti,*Discrete time high-order schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Num.Math.,**67**, (1994), 315-344.

[FG] M.Falcone,T.Giorgi,*An approximation scheme for evoltive Hamilton-Jacobi equations*, Preprint Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "La Sapienza,(1996).

[Fl] R.Fletcher,*Function minimization without evaluting derivates-a review*, The Computer Journal,**8**,(1965),33-38.

[L] P.L.Lions,*Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman, London, (1982).

[Le] R.J.LeVeque,*Numerical methods for conservative laws*, Birkäuser Verlag, Berlin,(1992).

[M] T.Manfroni,*Metodi numerici di ordine alto per equazioni evolutive del primo ordine*, Tesi di laurea. Dipartimento do Matematica, Università di Roma "La Sapienza,(1994).

[N] R.Nicolini,*Schemi semi-lagrangiani di ordine alto per equazioni a derivate parziali di prino ordine*, Tesi di laurea, Dipartimento di matematica, Università di Roma"La Sapienza,(1997)

[OS] S.Osher and C.W.Shu,*High-Order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equation*, SIAM J.Numerial Analysis, **28** (1991),907-922.

[RT] P.A.Raviart,J.M.Thomas,*Introduction à l'analyse numèrique des equations aux dèrivèes partielles*, Paris, Masson, (1983).

[S] C.W.Shu,*Essentyalli non-oscillatory and weight essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservative laws*, note Corso Cime, Cetraro, giugno, 1997.