In questa tesi ci occuperemo della ricerca di soluzioni periodiche di sistemi Hamiltoniani. Un sistema Hamiltoniano "standard" in $\mathbb{R}^{2n}$ è un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$(HS) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(p,q), \end{cases}$$

con $p, q \in \mathbb{R}^n$, $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, $\dfrac{\partial}{\partial q} = (\dfrac{\partial}{\partial q_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial q_n})$, $\dfrac{\partial}{\partial p} = (\dfrac{\partial}{\partial p_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial p_n})$.

Introducendo la matrice simplettica $J = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$, dove $\mathbf{I}_n$ denota la matrice identità $n \times n$, il sistema (HS) assume la forma più coincisa

$$\dot{x} = J \nabla H(x),$$

con $x = (p,q)$, $\nabla \equiv \nabla_x = (\dfrac{\partial}{\partial p}, \dfrac{\partial}{\partial q})$ e $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Molti sono i risultati raggiunti riguardo la ricerca di soluzioni periodiche per sistemi Hamiltoniani; qui ci limiteremo a trattarne alcuni ottenuti negli anni '80-'90.

Come è noto il flusso Hamiltoniano φ^t (ovvero la mappa che ad ogni $x \in \mathbb{R}^{2n}$ associa la soluzione al tempo t di (HS) con x come dato iniziale) conserva la 2-forma canonica

$$\omega := dp \wedge dq = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

cioè[1] $(\varphi^t)^*\omega = \omega$. Questo conduce alla conservazione della forma di volume $\Omega = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ e quindi in particolare alla conservazione del volume:

$$\varphi^t(D) = D$$

per un qualsiasi dominio D. Il flusso φ^t ha inoltre la proprietà di lasciare invariata l'energia H, ovvero

$$H(\varphi^t(x)) = H(x)$$

[1]Con l'asterisco denotiamo il "pull back", quindi per una qualunque 2-forma differenziale μ, su $\mathbb{R}^{2n}$, abbiamo $(\varphi^t)^*\mu_x(\xi, v) = \mu_{\varphi^t(x)}((\varphi^t(x))'\xi, (\varphi^t(x))'v)$, per ogni $x, \xi, v \in \mathbb{R}^{2n}$, dove $(\varphi^t(x))'$ è lo Jacobiano di φ^t calcolato in x.

per ogni tempo t per cui $\varphi^t(x)$ è ben definito. Infatti

$$\frac{d}{dt}H(\varphi^t(x)) = \langle \nabla H(\varphi^t(x)), \frac{d}{dt}\varphi^t(x)\rangle = \langle \nabla H(\varphi^t(x)), J\nabla H(\varphi^t(x))\rangle = 0,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Dunque il moto avviene su livelli di energia costanti:

$$\varphi^t(x) \in H^{-1}(c) \quad \forall\, t \quad \text{se} \quad H(x) = c.$$

Da tale proprietà sono nate molteplici questioni.
Un problema, ad esempio, è quello di determinare soluzioni periodiche su un fissato livello di energia, o meglio capire quali caratteristiche geometriche debba avere un'ipersuperficie per possedere orbite periodiche.
Effettivamente, come si vedrà, se S è un'ipersuperficie, che risulta essere un livello di energia costante per una certa hamiltoniana H, la proprietà di possedere orbite chiuse[2] è intrinseca ad S, non dipende cioè dalla particolare hamiltoniana H. Se infatti S è un'ipersuperficie di energia regolare, cioè

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = c\} \quad \text{e} \quad \nabla H(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in S,$$

per un'opportuna hamiltoniana H e un certo $c \in \mathbb{R}$, cercare soluzioni periodiche non triviali di

$$\dot{x} = J\nabla H(x)$$

equivale, a meno di una riparametrizzazione, a cercare soluzioni periodiche di

$$\dot{x} = JN(x),$$

dove con $N(x)$ abbiamo indicato il versore normale esterno [3] a S.
In seguito a tali osservazioni si è quindi cambiato punto di vista partendo, come detto, direttamente dalle caratteristiche geometriche dell'ipersuperficie S. Gli argomenti, che noi tratteremo, riguardano questo tipo di approccio. Infatti presenteremo un risultato di Clarke e Ekeland [H1], dove la stretta

[2] In seguito utilizzeremo spesso il termine "orbita chiusa" in luogo di "orbita periodica".

[3] Le ipersuperfici con cui lavoreremo saranno sempre assunte compatte e connesse, anche se non verrà specificato. Ricordando il teorema di Jordan-Brower [D], ha quindi senso parlare di normale "esterna".

convessità, della regione di cui l'ipersuperficie S è il bordo, è di fondamentale importanza ai fini della dimostrazione. Daremo poi una dimostrazione del teorema di Viterbo, dovuta ad Hofer e Zehnder [H]. In questo caso l'ipersuperficie S dovrà soddisfare una condizione più generale, ovvero essere un'ipersuperficie di contatto; chiariremo meglio tra breve tale concetto.
Prima di discutere i teoremi di cui ci siamo occupati, diamo alcuni cenni di precedenti approcci geometrici alla ricerca di orbite periodiche per sistemi hamiltoniani. Uno dei primi risultati in questo campo si deve ad esempio a Seifert [S], che considera hamiltoniane del tipo

$$H(p,q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(q) p_i p_j + V(q),$$

con $A(q) = \{a_{i,j}(q)\}$ tale che esiste $\lambda > 0$ per cui per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ si ha $\langle A(q)\xi, \xi \rangle \geqslant \lambda |\xi|^2$ con q in

$$D = \{q \in \mathbb{R}^n : V(q) < 1\}$$

e $V \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$[4], ottenendo una soluzione che parte ed arriva sul bordo di D in un tempo $T > 0$; a partire da tale orbita è possibile costruire un'orbita periodica di periodo $2T$. Una generalizzazione del caso trattato da Seifert si ha poi con Weinstein [W], che estende i risultati di Seifert ad hamiltoniane della forma

$$H(p,q) = K(p,q) + V(q),$$

con $V(q)$ e $K(p,q)$ tali che il caso trattato da Seifert rientri in quest'ultimo. Ad esempio $K(p,q)$ soddisfa $K(p,q) \longrightarrow +\infty$ quando $|p| \longrightarrow +\infty$ uniformemente in $q \in \bar{D}$.
Sempre Weinstein arriva a dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche per sistemi hamiltoniani generali con opportune proprietà di convessità:

Teorema 0.0.1. *Se $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ e $H^{-1}(1)$ è una varietà che costituisce il bordo di una regione compatta e convessa di $\mathbb{R}^{2n}$, allora (HS) possiede una soluzione periodica su $H^{-1}(1)$.*

[4] Per i dettagli si veda [S].

In questo stesso periodo Rabinowitz [R] dimostra il seguente risultato, ancora più generale:

Teorema 0.0.2. *Sia $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Supposto che per un qualche $b \neq 0$, $H^{-1}(b)$ è radialmente omeomorfo*[5] *a S^{2n-1} e*

$$\langle \xi, \nabla H(\xi) \rangle \neq 0 \quad per \quad \xi \in H^{-1}(b),$$

si ha che il sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = J\nabla H(x)$$

possiede una soluzione periodica su $H^{-1}(b)$.

Data la complessità della dimostrazione del teorema 0.0.1, Clarke e Ekeland ne danno una semplificazione, arrivando però ad un risultato più debole. Poiché nella tesi ci occuperemo nei dettagli di questa dimostrazione ne vedremo, a breve, qualche cenno tecnico.
Nel 1978 A. Weinstein, basandosi sulle ipotesi del teorema 0.0.1 e del teorema di Rabinowitz 0.0.2, ipotizza poi che questi due casi possano rientrare in una teoria più generale. Questo perché le ipersuperfici considerate in quei due teoremi ammettono, come campo trasversale, $X(x) = \frac{1}{2}x$, che in più soddisfa la relazione $L_X\omega = \omega$, dove L_V denota la derivata di Lie nella direzione del campo V(si veda [A]). Nel caso qui considerato, essendo ω la 2-forma canonica standard, la relazione $L_V\omega = \omega$ si traduce in una relazione sullo Jacobiano di V, precisamente[6]

$$L_V\omega = \omega \iff JV' + (V')^T J = J,$$

[5]Detta A la regione limitata di cui un'ipersuperficie S, compatta e connessa, è il bordo e supposto che $0 \in A$, S si dice radialmente omeomorfa a S^{2n-1} se la mappa

$$\begin{aligned} f :& S \longrightarrow S^{2n-1} \\ & x \longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

è un omeomorfismo.

[6]Tale equivalenza sarà dimostrata rigorosamente nell'ultimo capitolo della tesi.

relazione ovviamente soddisfatta dallo Jacobiano di $X(x) = \frac{1}{2}x$.
Ipersuperfici aventi come campo trasversale X sono dette stellate e sono particolari ipersuperfici di contatto. Infatti, con tale termine si indica un'ipersuperficie S per cui esiste un campo vettoriale V, definito in un intorno di S, trasversale all'ipersuperficie e tale che $L_V\omega = \omega$. Da tali argomenti Weinstein arriva dunque a formulare una congettura nota come "Congettura di Weinstein". La questione è quella di determinare l'esistenza di orbite periodiche su una qualsiasi ipersuperficie $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ compatta, connessa, di contatto e che soddisfa un'opportuna ipotesi topologica [7], che poi si rivelerà superflua. La risposta infatti si avrà nel 1987 grazie a C. Viterbo, che ne darà una dimostrazione richiedendo esclusivamente che l'ipersuperficie compatta e connessa sia di contatto. Noi, come detto, vedremo una dimostrazione del risultato di Viterbo più semplice dovuta ad Hofer e Zehnder.

Vediamo ora come è strutturata la tesi.
La prima parte (capitolo 2) sarà dedicata ad alcune nozioni basilari che verranno utilizzate nei capitoli successivi.
Presenteremo poi (capitolo 3) una semplificazione del teorema 0.0.1 dovuta a Clarke e Ekeland, che dimostrano l'esistenza di orbite periodiche su un'ipersuperficie che è il bordo di una regione compatta e strettamente convessa. Come abbiamo osservato l'esistenza di orbite chiuse su un'ipersuperficie S non dipende dalla particolare hamiltoniana scelta per rappresentare S. Essendo S convessa non risulta complicato costruire un' hamiltoniana H strettamente convessa tale che

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = 1\}.$$

A questo punto Clarke e Ekeland introducono la trasformata di Legendre in tutte le variabili e cioè considerano

$$G(y) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^{2n}} (\langle \xi, y \rangle - H(\xi)).$$

Con G definita in tale modo Clarke e Ekeland notano che i punti critici del

[7] Si veda [V].

funzionale

$$I : H^1(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z(t) \longmapsto \int_0^{2\pi} G(\dot z(t))dt \ ,$$

vincolato a

$$B = \{z \in H^1(S^1) : \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot z\rangle dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} z(t)dt = 0\},$$

dove con $H^1(S^1)$ abbiamo indicato lo spazio delle funzioni assolutamente continue 2π-periodiche con derivata a quadrato integrabile, danno origine a soluzioni periodiche del sistema (HS). Un punto critico $z \in B$ è infatti soluzione periodica di (HS), poiché per le sue caratteristiche soddisfa l'equazione di Eulero

$$\nabla G(\dot z) = \alpha Jz + \beta$$

in $L^2(S^1)$, con α e β costanti scelte in maniera opportuna. Questo fatto, grazie alla trasformata di Legendre, ha come conseguenza che
$x(t) = c(\alpha Jz(t) + \beta)$ è la soluzione desiderata se prendiamo $c = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\alpha}}$.
Nella prima parte della dimostrazione si vede quindi che I vincolato a B ammette minimo e dunque che esiste almeno una soluzione periodica.
L'ultimo capitolo (capitolo 4) è invece dedicato al teorema di Viterbo. Come già detto ne vedremo la dimostrazione di Hofer e Zehnder, che arrivano in più a nuovi risultati. Dimostrano infatti, che se S_t è una famiglia di ipersuperfici compatte e connesse tali che $S_0 = S$, esistono ϵ arbitrariamente piccoli per cui S_ϵ ammette orbite chiuse. A partire da questo fatto dimostrano poi che se in più S è di contatto allora le orbite chiuse su S_ϵ, con ϵ sufficientemente piccolo, danno origine a orbite chiuse su S.
In termini più tecnici la famiglia S_t è determinata da un diffeomorfismo ψ definito sulla varietà prodotto $(-1, 1)\times S$, tale che $\psi(0, S) = S$ e $S_t = \psi(t, S)$.
Hofer e Zehnder provano dunque che per ogni $0 < \delta < 1$, esiste un ϵ con $|\epsilon| < \delta$ tale che S_ϵ ammette un'orbita chiusa. Verificano inoltre che l'azione

$$A(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}\langle -J\dot x, x\rangle dt,$$

delle orbite chiuse trovate sulle ipersuperfici S_ϵ, soddisfa una stima dipendente solo dalla famiglia S_t, o più precisamente dal diffeomorfismo ψ.
Per vedere poi che un'ipersuperficie di contatto ammette un'orbita chiusa, utilizzano il fatto che è possibile costruire una famiglia di ipersuperfici S_t, per cui valga quanto appena detto, grazie all'ipotesi di "contatto" su S. Il diffeomorfismo ψ viene, in questo caso, costruito tramite il flusso ϕ del campo trasversale V, che rende S di contatto, cioè $S_\epsilon = \phi(\epsilon, S)$. Trasformano infine un'orbita periodica su S_ϵ, con ϵ abbastanza piccolo, in un'orbita periodica su S utilizzando la condizione

$$L_V\omega = \omega. \tag{1}$$

In questo modo si vede che se $x(t)$ (Fig.1 p.10) è un'orbita periodica di S_ϵ allora $y(t) = \phi(-\epsilon, x(t))$ a meno di una riparametrizzazione, è l'orbita cercata. Tale riparametrizzazione si deve al fatto che la 1, o equivalentemente la relazione $JV' + (V')^T J = J$, non porta ad una vera e propria trasformazione canonica[8], ma all'uguaglianza

$$(\phi'(\lambda, x))^T J\phi'(\lambda, x) = e^\lambda J.$$

Per dimostrare il teorema sulle orbite chiuse della famiglia S_t viene introdotta un'hamiltoniana H in cui le ipersuperfici di livello sono le S_ϵ. Si cercano poi i punti critici del funzionale

$$\Phi(x) = \int_0^1 \{\frac{1}{2}\langle -J\dot{x}, x\rangle - H(x)\}dt,$$

definito sullo spazio

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1) = \{x \in L^2(0,1;\mathbb{R}^{2n}) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||x_k|^2 < +\infty\}.$$

Questo perché si verifica che i punti critici del funzionale Φ definito su $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$ sono tutte e sole le soluzioni 1-periodiche di $\dot{x} = J\nabla H(x)$ e in più che, se la soluzione x è tale che $\Phi(x) > 0$, allora x risulta non triviale e sta su

[8] Ricordiamo che un diffeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ si dice trasformazione canonica se il suo Jacobiano φ' soddisfa la relazione $(\varphi')^T J\varphi' = J$.

un'ipersuperficie S_ϵ. Per determinare l'esistenza di punti critici x di Φ, per cui $\Phi(x) > 0$, si ricorre al cosiddetto "linking infinito dimensionale". Posto quindi $E := H^{\frac{1}{2}}(S^1)$, si vede tale spazio come somma diretta di tre spazi ortogonali, cioè $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$. Dove E^-, E^0 e E^+ corrispondono ai sottospazi individuati da $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$ una volta che gli elementi di E sono visti in serie di Fourier. Si dimostra allora che esistono $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$ tali che

$$\Phi_{|\Gamma} \geqslant \beta \quad \text{dove} \quad \Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathrm{E}^+ : \|\mathrm{x}\| = \alpha\}.$$

Si definisce poi (Fig.2 p.10)

$$\Sigma = \{x \in E : x = x^- + x^0 + s \cdot e^+, \text{ dove } \quad \|x^- + x^0\| \leqslant \tau \quad \text{e} \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau\},$$

con $e^+ \in E^+$ e $\|e^+\| = 1$ e si indica con $\partial\Sigma$ la frontiera di Σ nel sottospazio $\hat{E} := E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R} \cdot e^+$. Si vede che prendendo τ sufficientemente grande si ha

$$\Phi_{|\partial\Sigma} \leqslant 0.$$

Da questo segue subito che

$$(\partial\Sigma) \cdot t \cap \Gamma = \emptyset \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

dove con $x \cdot t$ abbiamo indicato la soluzione dell'equazione differenziale $\frac{d}{dt}(x \cdot t) = -\Phi'(x \cdot t)$, con x come dato iniziale. Si ricorre dunque alla teoria del grado topologico di Leray-Schauder (vedi, ad esempio, [N]), che estende i risultati del grado topologico per mappe definite su aperti limitati di $\mathbb{R}^n$ a mappe definite su aperti limitati di spazi di Banach. Tale teoria permette di dimostrare che

$$\Sigma \cdot t \cap \Gamma \neq \emptyset \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Con questi argomenti e sfruttando la condizione di Palais-Smale[9], soddisfatta dal funzionale Φ, si ottiene infine che

$$c = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in \Sigma} \Phi(x \cdot t) > 0$$

[9]Nel nostro caso tale condizione significherà semplicemente che presa $x_n \in E$ tale che $\|\Phi'(x_n)\| \longrightarrow 0$ esiste x_{n_k} e $x \in E$ per cui $x_{n_k} \longrightarrow x$ in E.

è un livello critico di Φ e quindi, in particolare, che esiste una soluzione 1-periodica di $\dot{x} = J\nabla H(x)$ tale che $\Phi(x) > 0$. Inoltre l'azione del punto critico corrispondente a tale livello risulta soddisfare la seguente stima

$$0 < A(x) < 36\pi\gamma^2,$$

avendo posto $\gamma = \mathrm{diam}(\psi((-1,1) \times \mathrm{S}))$. Tale stima conduce infine ad un altro risultato. Se $l(x)$ denota la lunghezza di una curva di periodo T,

$$l(x) := \int_0^T |\dot{x}(t)| dt,$$

e se $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è l'insieme di tutte le orbite periodiche esistenti sulla famiglia S_t e $l(x_\alpha) < k \ \forall \ \alpha \in I$, per una qualche costante $k > 0$, allora si vede che anche su $S = S_0$ esiste un'orbita periodica. Questo implica quindi, data la stima sull'azione, che se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$l(x) \leqslant c \, |A(x)|,$$

per ogni orbita periodica x in $\{S_t\}_{t \in (-1,1)}$, allora anche $S = S_0$ ammette un'orbita periodica.

fgr

Bibliografia

[A] V. I. Arnold,
Metodi Matematici della Meccanica Classica,
ed. Riuniti.

[A1] A. Ambrosetti e G. Prodi,
A Primer of Non Linear Analysis,
ed. Cambridge University Press.

[B] H. Brezis,
Analisi Funzionale,
ed. Liguori.

[D] V. Guillemin e A. Pollack,
Differential Topology,
ed. Prentice Hall.

[G] E. Sernesi,
Geometria I,
ed. Bollati Boringhieri.

[H] H. Hofer e E. Zehnder,
Periodic solution on hypersurfaces and a result by C.Viterbo,
Invent. math, 90, (1987), 1-9.

[H1] H. Hofer e E. Zehnder,
Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics,
ed. Birkhäuser.

[N] L. Niremberg,
Topics in Nonlinear Functional Analysis,
ed. New York University.

[R] Paul H. Rabinowitz,
Periodic Solution of Hamiltonian Systems,
J. Diff. Eq., 33, (1979), 336-352

[S] H. Seifert,
Periodische Bewegungen mechanischen Systeme,
Math. Z., 51, (1948), 197-216.

[V] C. Viterbo,
A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$,
Ann. Inst. Henri Poincaré, 4, (1987), 337-356.

[W] A. Weinstein,
Periodic orbits for convex Hamiltonian system,
Ann. Math., 108, (1978), 507-518.